ELEMENTI

DI

GEOMETRIA PIANA,

DEL SIGNOR

A. M. LEGENDRE,

MEMBRO DELL' ISTITUTO E DELLA LEGIONE D'ONORE,
DELLA SOCIETA' REALE DI LONDRA, EC.

QUARTA EDIZIONE NAPOLITANA, FATTA SULL' ULTIMA EDIZIONE
FRANCESE, RIVEDUTA ED ACCRESCIUTA DI NOTE

DA

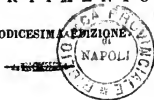
TOMMASO MANDOJ

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL REAL COLLEGIO
MILITARE.

NAPOLI
PRESSO RAFFAELLO DI NAPOLI LIBRAJO EDITORE
Calata S. Severo alla Pietra Santa n.° 17.

1851.

AVVERTIMENTO

SULLA DODICESIMA EDIZIONE.

La *dimostrazione della teoria delle parallele, tale qual essa era stata presentata nella 3.ª edizione di quest'opera, e nelle successive edizioni, fino all' 8.ª inclusiva, non essendo al coverto di qualche obbiezione, erasi determinato nella 9.ª edizione di ristabilire questa teoria presso a poco sulla stessa base di* Euclide; *ma delle ulteriori riflessioni fatte sul medesimo oggetto, delle quali se ne daranno gli sviluppi nella nota II., hanno fatto scoprire due nuove maniere di dimostrare il teorema sopra i tre angoli di un triangolo, senza il soccorso di alcun postulato. Si è inserita per conseguenza una di queste dimostrazioni nel testo di questa edizione, scegliendo quella che meno si allontana dalle idee ordinarie, e che d' altronde non sembra più difficile a comprendersi di quella ch'era stata data nelle edizioni precedenti, dalla 3.ª fino all' 8.ª*

Un altro cambiamento che si farà rimarcare in questa edizione, è relativo alla solidità della piramide triangolare. Si è ristabilita questa dimostrazione presso a poco come quella data nella prima edizione di questi elementi, ma profittando di una felice idea, dovuta al sig. Quarret, *capo d' istruzione a* Saint-Malo; *essa consiste a rendere eguali le altezze de' prismi eccedenti e deficienti, che si costruiscono nelle due piramidi para-*

gonate. Con questo mezzo la dimostrazione della solidità della piramide sembra ridotta all'ultimo grado di semplicità, di cui essa era suscettibile.

In fine, siccome le tavole trigonometriche costrutte secondo la divisione decimale del quadrante, non sono così generalmente sparse, come quelle che si rapportano all'antica divisione della circonferenza, si è creduto perciò che non sarebbe inutile di aggiungere agli esempî di calcolo dati nella trigonometria, i risultamenti che darebbe l'uso delle antiche tavole.

Il lettore che vorrà limitarsi, almeno in una prima lettura, ai semplici elementi, può passare senza inconveniente alcuno le note, gli appendici, e generalmente tutto ciò ch' è segnato con le virgole al margine, come essendo meno utile, o chiedendo uno studio più approfondito. Egli tornerà in seguito su questi oggetti, se lo crede a proposito, scegliendo quegli che gli converranno meglio, dietro l' avviso di un professore illuminato.

N. B. I numeri posti al piede della pagine indicano le proposizioni alle quali bisogna ricorrere per l'intelligenza delle dimostrazioni. Un sol numero, come 4, indica la proposizione IV del libro corrente, due numeri, 20. 3, indicano la XX proposizione del libro III.

Le aggiunzioni da noi fatte a questa edizione saranno contrassegnate da una crocetta (†).

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA PIANA.

LIBRO PRIMO.

PRINCIPJ.

DEFINIZIONI.

I. La Geometria è una scienza che ha per oggetto la misura dell'estensione.

L' estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza, ed altezza.

II. La *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità d'una linea si chiamano *punti*: il punto non ha dunque alcuna estensione.

III. La *Linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro.

IV. Ogni linea, che non è retta, nè composta di linee rette, è una *linea curva.*

Così AB (Fig. 1.) è una linea retta, ACDB una linea *spezzata*, o composta di linee rette, ed AEB è una linea curva.

V. *Superficie* è ciò che ha lunghezza, e larghezza, senza altezza o grossezza.

VI. Il *piano* è una superficie, nella quale prendendo due punti a piacere, ed unendo questi due punti con una linea retta, questa linea sta tutta intera nella superficie.

VII. Ogni superficie che non è piana, nè composta di superficie piane, è una *superficie curva.*

VIII. *Solido*, o *Corpo* è ciò che riunisce le tre dimensioni dell' estensione.

IX. Allorchè due linee rette AB, AC (Fig. 2.) s'incontrano, la quantità più o meno grande, per cui esse sono distanti l'una dall'altra, rispetto alla loro posizione, si chiama *angolo*, il punto d' incontro, o d' *intersezione* A è il *vertice* dell'angolo, le linee AB, AC ne sono i *lati.*

L'angolo s'indica talora colla sola lettera del vertice A,

talora con tre lettere BAC, CAB, avendo cura di mettere in mezzo la lettera del vertice.

Gli angoli sono, come tutte le quantità, suscettibili d'addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione: così l'angolo DCE (Fig. 20.) è la somma dei due angoli DCB, BCE, e l'angolo DCB è la differenza dei due angoli DCE, BCE.

x. Quando la linea retta AB (Fig. 3) incontra un'altra retta CD, in modo che gli angoli adiacenti BAC, BAD siano uguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama *angolo retto*, e la linea AB si dice *perpendicolare* sopra CD.

xi. Ogni angolo BAC (Fig. 4.) minore di un angolo retto è un *angolo acuto*, ogn'angolo DEF maggiore del retto è un *angolo ottuso*.

xii. Due linee rette si dicono *parallele* allorchè essendo situate nel medesimo piano non possono incontrarsi a qualunque distanza che si prolunghino l'una e l'altra. Tali sono le rette AB, CD. (Fig. 5.).

xiii. *Figura piana* è un piano terminato per ogni parte da linee.

Se le linee son rette, lo spazio che esse racchiudono, si chiama *figura rettilinea*, o *poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono (Fig.6.)

xiv. Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti, e si chiama *triangolo*; quello di quattro lati si chiama *quadrilatero*; quello di cinque *pentagono*; quello di sei *esagono*, ec.

xv. Si chiama triangolo *equilatero* quello che ha i suoi tre lati uguali (Fig. 7.); triangolo *isoscele* quello, di cui due soli lati sono uguali (Fig. 8.); triangolo *scaleno* quello, che ha i suoi tre lati disuguali. (Fig. 9.)

xvi. Il triangolo *rettangolo* è quello, che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Così ABC (Fig. 10) è un triangolo rettangolo in A, ed il lato BC è la sua ipotenusa.

xvii. Fra i quadrilateri si distinguono.

Il *quadrato*, che ha i suoi lati uguali, ed i suoi angoli retti. (Vedete la prop. XX. lib. I,) (Fig. 11.)

Il *rettangolo*, che ha gli angoli retti senz'avere i lati uguali. (Vedete la medesima proposizione). (Fig. 12.)

Il *parallelogrammo* o *rombo*; che ha i lati opposti paralleli. (Fig. 13.)

La *losanga*, che ha i lati eguali senza che gli angoli siano retti. (Fig. 14.)

Finalmente il *Trapezio*, di cui due soli lati sono paralleli. (Fig. 15.)

XVIII. Si chiama *diagonale* la linea che unisce i vertici di due angoli non adiacenti: tale è AC. (Fig. 42.)

XIX. Poligono *equilatero* è quello in cui tutti i lati sono uguali: poligono *equiangolo* quello in cui tutti gli angoli sono uguali.

XX. Due poligoni sono *equilateri tra di loro* quando hanno i lati rispettivamente uguali, e situati nel medesimo ordine, vale a dire, allorchè seguitando i loro contorni in un medesimo senso, il primo lato dell'uno è uguale al primo dell'altro, il secondo dell'uno al secondo dell'altro, il terzo al terzo, e così di seguito. Nella stessa maniera si concepisce cosa s'intenda per due poligoni *equiangoli tra di loro*.

In ambedue i casi i lati uguali, o gli angoli uguali, si chiamano lati o angoli *omologhi*.

N. B. Ne' quattro primi libri non si tratterà che delle figure piane o descritte sopra di una superficie piana.

Spiegazione de' termini e de' segni.

Assioma è una proposizione evidente di per se stessa.

Teorema è una verità che diviene evidente per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

Problema è una questione proposta, che esige una *soluzione*.

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione di un teorema, o per la soluzione d'un problema.

Il nome comune di *proposizione* si attribuisce indifferentemente ai teoremi, problemi, e lemmi.

Corollario è la conseguenza che deriva da una o da più proposizioni.

Scolio è un' osservazione sopra una o più proposizioni precedenti, che tende a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione, o la loro estesa applicazione.

Ipotesi è una supposizione fatta o nell' enunciato d' una proposizione, o nel corso d'una dimostrazione.

Il segno $=$ è il segno dell'ugnaglianza; così l'espressione $A=B$ significa che A è uguale a B.

Per esprimere che A è minore di B, si scrive $A<B$.

Per esprimere che A è maggiore di B, si scrive $A>B$.

Il segno $+$ si pronunzia *più*, ed indica l'addizione.

Il segno $-$ si pronunzia *meno*, e dinota la sottrazione: così $A+B$ rappresenta la somma delle quantità A e B; $A-B$ rappresenta la lor differenza, o ciò che resta togliendo B da A: così $A-B+C$, o $A+C-B$ significa che A e C debbono essere

aggiunte insieme, e che B dev'esser tolta dalla loro somma.

Il segno $\times$ indica la moltiplicazione; così $A \times B$ rappresenta il prodotto di A moltiplicata per B. Invece del segno $\times$ si adopera talora un punto; così $A.B$ è lo stesso che $A \times B$. S'indica ancora il medesimo prodotto senza alcun segno intermedio con AB; ma non bisogna impiegare questa espressione che quando non si ha nel medesimo tempo da impiegare quella linea AB, distanza dei punti A e B.

L'espressione $A \times (B+C-D)$ indica il prodotto di A per la quantità $B+C-D$. Se bisognasse moltiplicare $A+B$ per $A-B+C$, s'indicherebbe il prodotto così $(A+B) \times (A-B+C)$. Tutto ciò che è rinchiuso tra parentesi è considerato come una sola quantità.

Un numero posto innanzi ad una linea o ad una quantità, serve di moltiplicatore a questa linea o a questa quantità: così per esprimere che la linea AB è presa tre volte, si scive 3AB, per indicare la metà dell'angolo A, si scrive $\frac{1}{2}$A.

Il quadrato della linea AB s'indica con $\overline{AB}^2$; il suo cubo con $\overline{AB}^3$. Spiegheremo a suo luogo ciò che significa precisamente il quadrato, e il cubo d'una linea.

Il segno $\sqrt{}$ indica una radice da estrarsi: così $\sqrt{2}$ è la radice quadrata di 2; $\sqrt{A \times B}$ è la radice del prodotto $A \times B$, o la media proporzionale tra A e B.

ASSIOMI.

1. Due quantità uguali a una terza sono uguali fra loro.
2. Il tutto è maggiore della sua parte.
3. Il tutto è eguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.
4. Da un punto ad un altro non si può condurre che una sola linea retta.
5. Due grandezze, linee, superficie, o solidi, sono uguali allorchè, essèndo situate l'una sull'altra, coincidono in tutta la loro estensione.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Gli angoli retti sono tutti eguali fra loro.

Sia la linea retta CD (Fig. 16.) perpendicolare ad AB, e GH ad EF; dico che gli angoli ACD, EGH saranno uguali fra loro.

Si prendano le quattro distanze uguali CA, CB, GE, GF, la distanza AB sarà uguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB, in maniera che il punto E cada in A, e il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l'una con l'altra, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile (*a*); dunque il punto G medio di EF cadrà sul punto C medio di AB. Il lato EG essendo così applicato sopra CA, dico che il lato GH cadrà sopra CD; poichè supponiamo, s'è possibile, che cada sopra CK differente da CD; siccome per ipotesi (*b*), l'angolo EGH=HGF, bisognerebbe che si avesse ACK=KCB. Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD; d'altronde per ipotesi, ACD=BCD; dunque ACK è maggiore di KCB: dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK differente da CD, onde essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Ogni linea retta CD (Fig. 17.), *che ne incontra un altra* AB, *fa con questa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la cui somma è uguale a due angoli retti.*

Dal punto C si elevi sopra AB la perpendicolare CE. L'angolo ACD è la somma degli angoli ACE, ECD, dunque ACD+BCD sarà la somma dei tre ACE, ECD, BCD. Il primo di questi è retto, gli altri due fanno insieme l'angolo retto BCE: dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è uguale a due angoli retti.

Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro sarà parimente.

Corollario II. Se la linea DE (Fig. 18.) è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

(*a*) *Ass.* 4. — (*b*) *Def.* 10.

Poichè dall'essere DE perpendicolare ad AB ne segue che l'angolo ACD è uguale al suo adiacente DCB, e che dessi sono ambedue retti. Ma dell'essere l'angolo ACD un agolo retto ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto: dunque l'angolo ACE=ACD; e perciò AB è perpendicolare a DE.

Corollario III. Tutti gli angoli consecutivi BAC, CAD, DAE, EAF (Fig. 34.) formati da una medesima parte della retta BF, presi insieme valgono due angoli retti, perchè la lor somma è eguale a quella dei due angoli adiacenti BAC, CAF.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Due linee rette, che hanno due punti comuni, coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea retta.

Siano i due punti comuni A e B (Fig. 19.); prima di tutto le due linee non ne devono formar che una sola tra A e B, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A in B, il che è impossibile (*a*). Supponiamo in seguito che queste linee, essendo prolungate, cominciano a separarsi al punto C, l'una divenendo CD, l'altra CE. Si tiri pel punto C la linea CF, che faccia con CA l'angolo retto ACF. Poichè la linea ACD è retta, l'angolo FCD sarà un angolo retto (*b*); poichè la linea ACE è retta, l'angolo FCE sarà parimente un angolo retto. Ma la parte FCE non può essere uguale al tutto FCD; dunque le linee rette, che hanno due punti A e B comuni, non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento, dunque esse non formano che una sola e medesima linea retta.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se due angoli adiacenti ACD, DCB (Fig. 20.) *equivalgono insieme a due angoli retti, i due lati esterni* AC, CB *saranno in linea retta.*

Poichè, se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento; allora la linea ACE essendo retta, la somma degli angoli ACD, DCE sarà uguale a due retti (*c*). Ma, per ipotesi, la somma degli angoli ACD, DCB è pure uguale a due retti; dunque ACD+DCB sarebbe uguale ad ACD

(a) *Ass.* 1. — (b) *Pr.* 2. *Cor.* 1. — (c) *Pr.* 2.

+DCE ; togliendo da ambe le parti l'angolo ACD, resterebbla parte DCB eguale al tutto DCE ; lo che è impossibile. Dunque CB è il prolungamento di AC.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Qualora due linee rette AB, DE (Fig. 21.) *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono uguali.*

Imperocchè, siccome la linea DE è retta, la somma degli angoli ACD, ACE è uguale a due retti, e siccome la linea AB è retta, la somma dogli angoli ACE, BCE è pure uguale a due retti. Dunque la somma ACD+ACE è uguale alla somma ACE+BCE. Togliendo da ambe le parti lo stesso angolo ACE, resterà l'angolo ACD uguale al suo opposto BCE.

Si dimostrerebbe similmente che l'angolo ACE è uguale al suo opposto BCD.

Scolio. I quattro angoli formati intorno a un punto da due rette che si tagliano, equivalgono insieme a quattro angoli retti; poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti, e gli altri due ACD, BCD hanno lo stesso valore.

In generale, se quante rette si vogliano CA, CB ec. (Fig. 22.) s'incontrano in un punto C, la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA, sarà uguale a quattro angoli retti. Poichè se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendioolari tra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto da' quattro angoli retti, quanto dagli angoli successivi ACB, BCD ecc,

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA

Due triangoli sono uguali quando hanno un angolo uguale compreso tra due lati respettivamente uguali.

Sia l'angolo A (Fig. 23.) uguale all'angolo D, il lato AB uguale a DE, il lato AC uguale a DF; dico che i triangoli ABC, DEF saranno uguali.

Infatti, questi triangoli possono esser posti l'uno sull'altro in maniera che dessi coincidono perfettamente. E in primo luogo, se si pone il lato DE sul suo uguale AB, il punto D cadrà in A, e il punto E in B. Ma poichè l'angolo D è uguale all'angolo A, da che il lato DE sarà situato sopra

AB, il lato DF prenderà la direzione AC. Di più DF è uguale ad AC; dunque il punto F cadrà in C, ed il terzo lato EF coprirà esattamente il terzo lato BC, dunque il triangolo DEF è uguale al triangolo ABC (*a*).

Corollario. Dunque dall'essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, l'angolo A=D, il lato AB=DE, ed il lato AC=DF, si può conchiudere che le altre tre sono ancora eguali, cioè l'angolo B=E, l'angolo C=F, ed il lato BC=EF.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA

Due triangoli sono uguali quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.

Sia il lato BC (Fig. 23.) uguale al lato EF, l'angolo B uguale all'angolo E, e l'angolo C uguale all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà uguale al triangolo ABC.

Poichè, per eseguire la soprapposizione, sia situato EF sul suo uguale BC; il punto E cadrà in B, ed il punto F in C. Poichè l'angolo E è uguale all'angolo B, il lato ED prenderà la direzione di BA, onde il punto D si troverà su qualche punto della linea BA. Parimente, poichè l'angolo F è uguale all'angolo C, la linea FD prenderà la direzione di CA, ed il punto D si troverà su qualche punto del lato CA; dunque il punto D, che deve trovarsi a un tempo stesso sulle due linee BA, CA, cadrà sulla loro unica intersezione A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l'uno coll'altro, e sono perfettamente uguali.

Corollario. Dunque dall'essere uguali tre cose in due triangoli, cioè, BC=EF, B=E, C=F, si può conchiudere che le altre son pure uguali, cioè, AB=DE, AC=DF, A=D.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA

In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due. ed è maggiore della loro differenza

Imperocchè la linea retta BC (Fig. 23.) per esempio, è il più corto cammino da B in C (*b*); dunque BC è minore di BA+AC.

(a) *As.* 5. — (b) *Def.* 3.

(BC+AC>AB)-BC=AC>AB-BC

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

Se un da punto O (Fig. 24.) *preso dentro il triangolo* ABC *si conducano alle estremità d'un lato* BC *le linee rette*, OB, OC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC.

Sia prolungata BO fino all'incontro del lato AC in D; la linea retta OC è più corta che $OD+DC$ (*a*), aggiungendo da una parte e dall'altra BO, si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$, ossia $BO+OC<BD+DC$.

Si ha parimente $BD<BA+AD$, aggiungendo da ambe le parti DC, si avrà $BD+DC<BA+AC$. Ma abbiamo trovato $BO+OC<BD+DC$, dunque con più ragione sarà $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Se i due lati AB, AC (Fig. 25.) *del triangolo* ABC *sono uguali respettivamente a' due lati* DE, DF *del triangolo* DEF, *e se nel tempo stesso l'angolo* BAC, *compreso dai primi, è maggiore dell'angolo* EDF, *compreso* [illegible] *secondi; dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà* [illegible]*iore del terzo* EF *del secondo.*

Si faccia l'angolo $CAG=D$, [illegible] dia $AG=DE$, e si soggiunga CG, il triangolo GAC sarà ug[illegible] al triangolo DEF; giacchè questi triangoli hanno per costru[illegible]e un angolo uguale compreso tra lati uguali (*b*); si avrà dunque $CG=EF$. Ora possono darsi tre casi secondochè il punto G cada fuori del triangolo ABC o sul lato BC, o dentro dell[illegible]sso triangolo.

Primo caso. La linea retta GC [illegible]. 25.) è più corta di $GI+IC$; la linea retta AB è più corta di $AI+IB$; dunque $GC+AB$ è minore di $GI+AI+IC+IB$, ovvero, ciò che torna lo stesso, $GC+AB<AG+BC$. Togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale AG, resterà $GC<BC$, ma $GC=EF$, dunque si avrà $EF<BC$.

Secondo caso. Se il punto G (Fig. 26.) cade sul lato BC, è chiaro che GC, o la sua uguale EF sarà minore di BC.

Terzo caso. Finalmente se il punto G (Fig. 27.) cade dentro del triangolo ABC, si avrà, secondo il teorema precedente, $AG+GC<AB+BC$. Togliendo da una parte AG, e

(*a*) *Pr.* 8. — (*b*) *Pr.* 6.

Corollario. Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo equiangolo, cioè che ha tutti i suoi angoli eguali.

Scolio. L'eguaglianza de' triangoli ABD, ACD prova nel tempo stesso che l'angolo BAD=DAC, e che l'angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti; dunque *la retta tirata dal vertice d'un triangolo isoscele al punto medio della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato qualunque, ed allora il suo *vertice* è quello dell'angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per *base* il lato che non è uguale ad uno degli altri due.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Reciprocamente, se in un triangolo due angoli sono uguali, i lati opposti saranno uguali, ed il triangolo sarà isoscele.

Sia l'angolo ABC=ACB (Fig. 29.), dico che il lato AC sarà uguale al lato AB.

Poichè, se questi lati non sono uguali, sia AB il maggiore de' due. Si tagli BD=AC, e si congiunga DC. L'angolo DBC è, per ipotesi, uguale all'angolo ACB; i due lati DB, BC sono uguali a' due AC, CB; dunque il triangolo DBC (*a*) sarebbe eguale al triangolo ACB; ma la parte non può essere eguale al tutto; dunque non vi è ineguaglianza tra i lati AB, AC; dunque il triangolo ABC è isocele.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA

Di due lati d'un triangolo, il maggiore è quello che è opposto ad un angolo maggiore; e reciprocamente, di due angoli d'un triangolo, il maggiore è quello che è opposto ad un lato maggiore.

1.° Sia l'angolo C>B (Fig. 30.); dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Si faccia l'angolo BCD=B; nel triangolo BDC si avrà (*b*) BD=DC. Ma la linea retta AC è minore di AD+DC, ed AD+DC=AD+DB=AB; dunque AB è maggiore di AC.

2.° Sia il lato AB>AC; dico che l'angolo C opposto al lato AB, sarà maggiore dell'angolo B opposto al lato AC.

(a) *Pr.* 6. — (b) *Pr.* 13.

Poichè, se si avesse $C<B$, ne seguirebbe da ciò che si è dimostrato, $AB<AC$, il che è contro la supposizione. Se poi fosse $C=B$, ne seguirebbe (*a*) $AB=AC$; il che è pure contro la supposizione. Dunque bisogna che l'angolo C sia maggiore di B.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Da un punto A (Fig. 31.) *dato fuori d'una retta* DE *non si può abbassare che una sola perpendicolare a questa retta.*

In fatti supponiamo che se ne possano abbassare due AB, ed AC; prolungasi una di esse AB di una quantità $BF=AB$, e si unisca FC.

Il triangolo CBF è uguale al triangolo ABC, poichè l'angolo CBF è retto, al pari di CBA; il lato CB è comune, ed il lato $BF=AB$; dunque questi triangoli sono uguali (*b*), e ne segue che l'angolo $BCF=BCA$. L'angolo BCA è retto, per ipotesi; dunque l'angolo BCF è anche retto. Ma se gli angoli adiacenti BCA, BCF equivalgono insieme a due angoli retti, bisogna che la linea ACF sia retta (*c*); dunque resulta che per i due medesimi punti A, e F si potrebbero condurre due linee rette ABF, ACF, il che è impossibile (*d*); dunque è parimente impossibile che da un medesimo punto si possano abbassare due perpendicolari sulla medesima linea retta.

Scolio. Da un medesimo punto C (Fig. 17.) dato sopra la linea AB è ugualmente impossibile di alzare due perpendicolari a questa linea; perchè se CD, CE fossero queste due perpendicolari, l'angolo DCB sarebbe retto, come pure BCE, e la parte sarebbe eguale al tutto.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Se da un punto A (Fig. 31.) *situato fuori d'una retta* DE *si abbassino la perpendicolare* AB *su questa retta, e differenti oblique* AE, AC, AD, ec. *a differenti punti della medesima retta*:

1.° *La perpendicolare* AB *sarà più corta di ogni obliqua.*

2.° *Le due oblique* AC, AE, *condotte da una parte e dall'altra della perpendicolare a distanze uguali* BC, BE, *saranno uguali.*

(a) *Pr.* 13. — (b) *Pr.* 6. — (c) *Pr.* 4. — (d) *Ass.* 4.

3.° *Di due oblique* AC *ed* AD, *e* AE *ed* AD, *condotte come si vorrà, quella che si allontana di più dalla perpendicolare, sarà la più lunga.*

Prolunghisi la perpendicolare AB di una quantità BF = AB, e si congiungano FC, FD.

1.° Il triangolo BCF è uguale al triangolo BCA, perchè l'angolo retto CBF = CBA, il lato CB è comune, ed il lato BF = BA; dunque (*a*) il terzo lato CF è uguale al terzo AC. Ora ABF linea retta è più corta di ACF linea spezzata; dunque AB metà di ABF è più corta di AC metà di ACF: dunque 1.° la perpendicolare è più corta di ogni obliqua.

2.° Se si suppone BE = BC, siccome si ha inoltre AB comune, e l'angolo ABE = ABC, ne segue che il triangolo ABE è uguale al triangolo ABC; dunque i lati AE, AC sono uguali; dunque 2.° due oblique che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare sono uguali.

3.° Nel triangolo DFA la somma delle linee AC, CF è minore (*b*) della somma de' lati AD, DF; dunque AC, metà della linea ACF, è minore di AD, metà di ADF; dunque 3.° le oblique che si allontanano di più dalla perpendicolare, sono le più lunghe.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza da un punto ad una retta, poichè essa è più corta d'ogni obliqua.

II. Da un medesimo punto non si possono condurre a una medesima linea tre rette uguali; poichè, se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique uguali, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se dal punto C. (Fig. 32.) *medio della retta* AB, *si elevi la perpendicolare* CE *su questa retta,* 1.° *ogni punto della perpendicolare sarà ugualmente distante dalle due estremità della linea* AB; 2.° *ogni punto situato fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle medesime estremità* A *e* B.

Imperocchè 1.° siccome si suppone AC = CB; le due oblique AD, DB si allontanano ugualmente dalla perpendicolare; esse dunque sono uguali. Lo stesso si dica delle due oblique AE, EB, delle due AF, FB, ec.; dunque 1.° ogni punto della perpendicolare è ugualmente distante dalle estremità A, e B.

(a) Pr. 6. — (b) Pr. 9.

2.° Sia I un punto fuori della perpendicolare; se si uniscano IA, IB: una di queste linee taglierà la perpendicolare in D, d'onde tirando DB, si avrà DB=DA. Ma la linea retta IB è più corta della linea spezzata ID+DB, ed ID+DB=ID+DA=IA; dunque IB<IA; dunque 2.° ogni punto fuori della perpendicolare è disugualmente distante dalle estremità A e B.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA

Due triangoli rettangoli sono uguali quando hanno l' ipotenusa uguale ed un lato uguale.

Sia l'ipotenusa AC=DF (Fig. 33.), ed il lato AB=DE; dico che il triangolo rettangolo ABC sarà uguale al triangolo rettangolo DEF.

L'uguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse uguale al terzo EF: supponiamo, s'è possibile, che questi lati non siano uguali, e che BC sia il maggiore. Si tagli BG=EF, e si congiunga AG. Il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF, poichè l'angolo retto B è uguale all'angolo retto E, il lato AB=DE, ed il lato BG=EF, dunque questi due triangoli sono eguali (*a*), e si ha per conseguenza AG=DF: ma, per ipotesi, DF=AC; dunque AG=AC. Ma l'obliqua AC non può essere uguale ad AG (*b*), giacchè è più lontana dalla perpendicolare AB, dunque è impossibile che BC differisca da EF; dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

Il sig. Professore Mandoj, *conoscendo la difficoltà che incontrano i giovani nel concepire la forza della dimostrazione del seguente teorema, ha creduto conveniente, per maggior chiarezza, di far qui inserire un' altra sua dimostrazione del medesimo teorema.*

LEMMA.

In ogni triangolo se si prolunga un lato, sarà l'angolo esterno maggiore di ciascuno degl' interni ed opposti.

DIMOSTRAZIONE.

Sia ABC (tav. 7 bis, fig. X), un triangolo qualunque, e sia il lato BC disteso verso D, dico che l'angolo esterno ACD è maggiore di ciascuno degl'interni ed opposti BAC, ed ABC

(a) *Pr.* 6. — (b) *Pr.* 16.

Infatti, si divida AC in parti uguali in E, e tirata BE, si prolunghi in F, finchè sia EF $=$BE, e si congiunga FC. I due triangoli ABE, CFE, avendo BE $=$EF, AE $=$EC, e l'angolo AEB $=$CEF, essi saranno eguali, e sarà l'angolo EAB $=$ECF: ma l'angolo esterno ACD è maggiore di ECF: dunque sarà ancora l'angolo esterno ACD maggiore di EAB, ossia di CAB.

Similmente si prolunghi il lato AC verso D', si divida BC per metà in H e si congiunga AH, la quale si prolunghi in G fino a che sia HG $=$HA, e si congiunga CG. I due triangoli ABH, CHG, avendo BH $=$HC, AH $=$HG, e l'angolo AHB $=$ CHG, essi saranno eguali, e sarà l'angolo ABH $=$HCG; ma l'angolo BCD', è maggiore dell'angolo HCG, dunque sarà ancora l'angolo BCD' ovvero il suo eguale ACD, maggiore di ABH, ossia maggiore di ABC. Dunque ec.

TEOREMA

In ogni triangolo, la somma de' tre angoli è uguale a due angoli retti (tav. 7 bis fig. Y).

DIMOSTRAZIONE.

In fatti, se la somma de' tre angoli del triangolo ABC non è uguale a due retti, essa dovrà essere maggiore, o minore.

1.° Sia, s'è possibile, maggiore, e sia l'angolo MCN l'eccesso di detta somma su due retti. Si divida il lato AC in due parti eguali nel punto O, e per esso si tiri la retta BOA', sulla quale si tagli OA'$=$ OB, e si congiunga A'C. Similmente si divida A'C per metà in O', si giunga BO'; sulla quale si prenda O'A''$=$ O'B, e si unisca A''C. Nello stesso modo si continuerà avanti la medesima costruzione, fino a che si perviene ad un triangolo A'''BC in cui sia l'angolo A'''CN$<$MCN. Ciò fatto i due triangoli ABO $=$A'OC, avendo AO$=$ OC, BO$=$ OA', e l'angolo ABO$=$ A'OC essi saranno eguali, e sarà l'angolo BAO $=$OÇA', e l'angolo ABO $=$OA'C; onde sarà la somma di BAO$+$ABO $=$OCA'$+$OA'C, ed aggiungendo di comune gli angoli OBC$+$OCB, sarà la somma de' tre angoli del triangolo ABC, eguale a quella de' tre angoli del triangolo A'BC. Similmente si dimostra che la somma de'tre angoli del triangolo A'BC è eguale a quella de' tre angoli del triangolo A''BC.... A'''BC. Dal che segue che la somma de'tre angoli di qualsivoglia triangolo della serie costrutta, è sempre eguale alla somma de' tre angoli del triangolo ABC.

Ciò premesso, essendo ciascun angolo interno BA''C. CBA''' minore dell'angolo esterno A'''CN, sarà la somma de'due an-

goli BA‴C+CBA‴ minore del doppio dell'esterno A″CN, ed aggiungendo di comune l'angolo A″CB, sarà la somma de'tre angoli del triangolo A″BC, ovvero del triangolo ABC, minore del doppio dell'angolo A‴CN più l'angolo A‴CB, ossia minore di due retti più l'angolo A″CN; ma la somma de'tre angoli del triangolo ABC, per ipotesi, è eguale a due retti più l'angolo MCN, dunque sarà la somma di due retti più l'angolo MCN, minore di due retti più l'angolo A‴CN, e quindi sarà l'angolo MCN minore di A‴CN, il che è impossibile, dunque è impossibile ancora che la somma de'tre angoli del triangolo ABC sia maggiore di due retti.

2.° Sia ora, s'è possibile, la somma de'tre angoli del triangolo ABC minore di due retti, e sia l'angolo MCN il *deficit* di essa somma su due retti; sarà per conseguenza la somma de'tre angoli del triangolo ABC eguale all'angolo MCB. Ciò posto, s'intenda fatta la medesima costruzione di qui innanzi, cioè si descriva la serie de'triangoli A′BC, A″BC... la quale si porti tanto avanti, fino a che si arrivi al triangolo A‴BC, in cui l'angolo A‴CB sia maggiore di MCB. Avendo di sopra dimostrato che la somma de'tre angoli del triangolo A‴CB è eguale a quella de'tre angoli del triangolo ABC, sarà perciò anche la somma dei tre angoli del triangolo A‴BC eguale all'angolo MCB, e perciò sarà il solo angolo A‴CB minore dello stesso angolo MCB, il che è impossibile, dunque è impossibile ancora che la somma de'tre angoli del triangolo ABC sia minore di due retti. Quindi la somma de'tre angoli del triangolo ABC non potendo essere nè maggiore nè minore di due retti, essa sarà eguale a due retti. Dunque è vero che ec.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

In ogni triangolo, la somma de' suoi tre angoli è uguale a due angoli retti.

Sia ABC (Fig. 35.) il triangolo proposto nel quale noi supporremo (1) che AB sia il lato il più grande, e BC il più piccolo, e che per conseguenza ACB sia l'angolo il più grande, e ABC il più piccolo (*a*).

Pel punto A e pel punto I, medio del lato opposto BC,

---

(1) *Questa supposizione non esclude il caso in cui il lato medio AC fosse eguale ad uno degli estremi AB, o BC.*

(a) *Pr.* 14.

si tiri la retta AI, che si prolungherà in C', fino a che sia $AC' = AB$. Prolunghisi similmente AB in B' in fino a che sia AB' doppia di AI.

Se si dinotino con A, B, C, i tre angoli del triangolo ABC, e similmente con A', B', C', i tre angoli del triangolo $A'B'C'$, dico che si avrà l'angolo $C' = B + C$, e l'angolo $A = A' + B'$, dal che risula $A + B + C = A' + B' + C'$; cioè a dire che la somma de' tre angoli è la stessa nei due triangoli.

Per dimostrarlo si faccia $AK = AI$, e si congiunga $C'K$. Si avrà il triangolo $C'AK$ eguale al triangolo BAI, poichè in questi due triangoli l'angolo comune A è compreso tra lati respettivamente eguali, cioè $AC' = AB$; ed $AK = AI$. Dunque il terzo lato $C'K$ è eguale al terzo lato BI, e quindi anche l'angolo $AC'K = ABC$, e l'angolo $AKC = AIB$.

Dico ora che il triangolo $B'C'K$ è uguale al triangolo ACI: poichè la somma dei due angoli adiacenti $AKC + C'KB'$ è uguale a due angoli retti (*a*) al pari della somma dei due angoli $AIC + AIB$, sottraendo da una parte e dall'altra gli angoli eguali AKC', AIB, resterà l'angolo $C'K'B = AIC$. Questi angoli eguali nei due triangoli sono compresi tra lati respettivamente eguali cioè, $C'K = IB = CI$, e $KB' = AK = AI$, giacchè per costruzione $AB' = 2AI = 2AK$. Dunque i due triangoli $B'C'K$, ACI, sono eguali (*b*), e perciò il lato $C'B' = AC$, l'angolo $B'C'K = ACB$, e l'angolo $KB'C' = CAI$.

Segue da ciò 1.° che l'angolo $AC'B'$, disegnato con C', è composto da due angoli eguali agli angoli B e C del triangolo ABC, e che perciò si ha $C' = B + C$. 2.° che l'angolo A del triangolo ABC è composto dell'angolo A', ossia $C'AB'$ che appartiene al triangolo $AB'C'$, e dall'angolo CAI eguale all'angolo B' dello stesso triangolo, ciò che dà $A = A' + B'$ dunque sarà $A + B + C = A' + B' + C'$. Daltronde perchè si ha per ipotesi $AC < AB$, e per conseguenza $C'B' < AC'$ si vede che nel triangolo $AC'B'$ l'angolo in A designato da A', è minore di B', e siccome la somma di questi due angoli è uguale all'angolo A del triangolo proposto, così ne segue che si ha l'angolo $A' < \frac{1}{2} A$.

Se si applica la stessa costruzione al triangolo $AB'C'$, per formare un terzo triangolo $AC''B''$, i cui angoli sono disegnati con A'', B'', C'', si avranno similmente le due eguaglianze $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B'$, dal che risulta $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Quindi la somma dei tre angoli è la stessa

---

(a) *Pr.* 2. — (b) *Pr.* 6.

in questi tre triangoli. Si avrà nel medesimo tempo l'angolo $A'' < \frac{1}{2} A'$, e per conseguenza $A'' < \frac{1}{4} A$.

Continuando indefinitamente la serie dei triangoli $AC'B'$, $AC''B''$, ec. si arriverà ad un triangolo *abc* nel quale la somma dei tre angoli sarà sempre la stessa che nel triangolo proposto ABC, e che avrà l'angolo *a* più piccolo di qualunque termine che vorrassi della progressione decrescente $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{4}$ A, $\frac{1}{8}$ A, ec.

Si può dunque supporre questa serie di triangoli prolungata fino a che l'angolo *a* sia minore di qualunque angolo dato. E se per mezzo del triangolo *abc* si costruisce il triangolo seguente $a'\ b'\ c'$, la somma degli angoli $a' + b'$ di questo triangolo sarà eguale all'angolo *a*, e sarà per conseguenza minore di qualunque angolo dato; dal che si vede che la somma de' tre angoli del triangolo $a'\, b'\, c'$ ci riduce quasi al solo angolo c'.

Per aver la misura precisa di questa somma, prolunghisi il lato $a'\, c'$ verso d', e si chiami x', l'angolo esterno $b'\, c'\, d'$; quest'angolo x', unito all'angolo c' del triangolo $a'\, b'\, c'$, fa una somma eguale a due angoli retti (*a*); e perciò disegnando l'angolo retto con D, si avrà $c' = 2D - x'$, dunque la somma degli angoli del triangolo $a'\ b'\ c'$ sarà.

$$2D + a' + b' \pm x'.$$

Ma si può concepire che il triangolo $a'c'\, b'$ varia nei suoi angoli e ne' suoi lati in modo da rappresentare i successivi triangoli che nascono ulteriormente colla stessa costruzione; e che si approssimano di più in più al limite in cui gli angoli a' e b' sarebbero nulli. In questo limite la retta $a'\ c'\ d'$ confondendosi con $a'\, b'$, i tre punti a', c', b', finiscono con esser esattamente in linea retta: allora gli angoli b' ed x' divengono nulli nel medesimo tempo che l'angolo a', e la quantità $2D + a' + b' - x'$, che misura la somma de' tre angoli del triangolo $a'\ c'\ b'$ si riduce a 2D, dunque *in ogni triangolo la somma de' suoi tre angoli è eguale a due angoli retti.*

Corollario I. Due angoli di un triangolo essendo dati, o solamente la loro somma, si conoscerà il terzo sottraendo la somma di questi angoli da due angoli retti.

II. Se due angoli di un triangolo sono rispettivamente eguali a due angoli di un altro triangolo, sarà il terzo dell'uno eguale al terzo dell'altro, e i due triangoli saranno equiangoli tra loro.

III. In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, poichè se ve ne fossero due, il terzo dovrebb'essere

---

(a) *Pr.* 2.

nullo: e con più ragione un triangolo non può avere che un angolo ottuso.

IV. In ogni triangolo rettangolo la somma de'due angoli acuti è uguale ad un angolo retto.

V. In un triangolo equilatero ogni angolo è il terzo di due angoli retti, o due terzi di un retto. Dunque se l'angolo retto è rappresentato da 1, l'angolo del triangolo equilatero lo sarà da $^2/_3$.

VI. In ogni triangolo ABC se si prolunga il lato AB verso D, l'angolo esterno CBD sarà eguale alla somma de' due interni opposti A e C, poichè aggiungendo di comune ABC, le due somme sono eguali a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

La somma di tutti gli angoli interni di un poligono è uguale a tante volte due angoli retti, quanto è il numero dei suoi lati meno, due.

Sia ABCDEF ec. il poligono proposto (Fig. 42.); se dal vertice di un medesimo angolo A si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali AC, AD, AE, ec., è facile il vedere che il poligono resterà diviso in cinque triangoli, se avrà sette lati; in sei triangoli, se avrà otto lati; e in generale in tanti triangoli quanto è il numero de' lati del poligono meno due; perchè questi triangoli possono essere considerati come aventi per vertice comune il punto A, e per basi i differenti lati del poligono, eccettuati i due soli, che formano l' angolo A. Si vede nel medesimo tempo che la somma degli angoli di tutti questi triangoli è la stessa che la somma degli angoli del poligono. Dunque quest' ultima somma è eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, e vale a dire quanto è il numero dei lati del poligono meno due.

Corollario I. La somma degli angoli di un quadrilatero è uguale a due angoli retti moltiplicati per $4-2$; ciò che fa quattro angoli retti: dunque, se tutti gli angoli di un quadrilatero sono eguali, ciascuno di loro sarà un angolo retto, lo che giustifica la definizione XVII. ove si è supposto che i quattro angoli d' un quadrilatero son retti, nel caso sì del rettangolo che del quadrato.

II. La somma degli angoli d' un pentagono è eguale a due angoli retti moltiplicati per $5-2$, il che fa 6 angoli retti; dunque, allorchè un pentagono è *equiangolo*, ciascun

angolo è eguale al quinto di sei angoli retti, ovvero ai $6/5$ di un angolo retto.

III.La somma degli angoli di un esagono è di $2 \times (6-2)$, ovvero di 8 angoli retti; dunque nell'esagono equiangolo ciascun angolo è $8/6$, ossia $4/3$ d'un angolo retto. E così di seguito.

Scolio (Fig. 43). Se si volesse applicare questa proposizione a' poligoni che hanno uno o molti angoli *rientrati*, bisognerebbe considerare ciascun angolo *rientrante* come essendo più grande di due angoli retti. Ma, a scanso d'ogni imbarazzo, non considereremo qui, ed in appresso, se non che i poligoni ad angoli *salienti*, che si posson chiamare ancora *poligoni convessi*. Ogni poligono convesso è tale che una linea retta, condotta come si vorrà, non può mai incontrare il contorno di questo poligono se non che in due punti.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se due linee rette AB, CD (Fig. 36.) *sono perpendicolari ad una terza* FG, *queste due linee saranno parallele, cioè a dire che non si potranno incontrare a qualunque distanza che si prolunghino* (*a*).

Poichè, se queste linee potessero incontrarsi in un punto O; esisterebbero due perpendicolari OF, OG abbassate da un medesimo punto O sopra una medesima retta FG; ciò ch'è impossibile (*b*).

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se due linee rette AB, CD (Fig. 36). *fanno con una terza* EF, *due angoli interni* BEF, DEF, *la cui somma sia eguale a due angoli retti, le linee* AB, CD, *saranno parallele.*

Se gli angoli BEF, DEF, fossero eguali, essi sarebbero l'uno e l'altro retto, e si caderebbe nel caso della proporzione precedente; supponiamo dunque ch'essi siano disuguali, e dal punto F, vertice del maggiore, si abbassi FG perpendicolare sopra di AB.

Nel triangolo EFG, la somma de'due angoli acuti FEG +EFG è eguale ad un retto (*c*); questa somma essendo tolta

(a) *Def.* 12. — (b) Pr. 15. — (c) *Pr.* 19. *cor.* 4.

dalla somma BEF+EFD, eguale per ipotesi a due angoli retti, resterà l'angolo DFG eguale ad un angolo retto. Dunque le due linee AB, CD, sono perpendicolari ad una stessa linea GE, dunque esse sono parallele (*a*).

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se due linee rette AB, CD (Fig. 37.) *fanno con una terza* EF, *due angoli interni dalla medesima parte, la cui somma sia minore o maggiore di due angoli retti; le linee* AB, CD, *prolungate sufficientemente dovranno incontrarsi.*

Sia 1.° la somma BEF+EFD minore di due angoli retti; si tiri FG in maniera che l'angolo EFG=AEF, si avrà la somma BEF+EFG eguale alla somma BEF+AEF, e per conseguenza eguale a due angoli retti, e poichè BEF+EFD è minore di due angoli retti, perciò la retta DF sarà compresa nell'angolo EFG.

Pel punto F si tiri un obliqua EM, che incontri AB in M, l'angolo AMF sarà eguale a GFM, poichè aggiungendo da ambe le parti la stessa quantità EFM+FEM, le due somme sono eguali ciascuna a due angoli retti. Prendasi in seguito MN = FM, e si congiunga FN; l'angolo AMF, esterno al triangono FMN, è eguale alla somma de'due interni opposti MFN, MNF (*b*); ma questi sono eguali tra loro, come opposti ai lati eguali MN, FM; dunque l'angolo AMF, o il suo eguale MFG è doppio di MFN; e perciò la retta FN divide in due parti eguali l'angolo GFM, ed incontra la linea AB in un punto N, posto alla distanza di MN = FM.

Ne segue dalla medesima dimostrazione, che se si prenda NP = FN, si determinerà sulla linea AB il punto P, ove termina la retta FP, che fa l'angolo GFP eguale alla metà dell'angolo GFN, ovvero al quarto dell'angolo GFM.

Si possono dunque prendere successivamente la metà, il quarto, l'ottava parte, ec. dell'angolo GFM e le linee che operano queste divisioni, incontrano la linea AB in punti di più in più distanti, ma facile a determinare, poichè MN= FM, NP = FN, PQ = PF ec. Si può anche osservare che ogni distanza di uno di questi punti d'intersezione al punto fisso F, non è affatto doppia della distanza del punto d'intersezione precedente, poichè FN per esempio è minore di FM+MN, ovvero di 2FM. Si ha similmente EP <2FN, FQ <2FP ec.

(a) *Pr.* 21. — (b) *Pr.* 19. *cor.* 6.

Ma continuando a suddividere l'angolo GFM in ragione doppia, si arriverà ben tosto ad un angolo GFZ più piccolo dell'angolo dato GFD, e sarà ancor vero che FZ prolungata incontri AB in un punto determinato ; dunque con più ragione la retta FD compresa nell' angolo EFZ, incontrerà AB.

Supponiamo 2.° che la somma de' due angoli interni AEF+CFE sia maggiore di due angoli retti; si prolunghi AE verso B, e CF verso D, la somma dei quattro angoli AEF, BEF, CFE, EFD, sarà eguale a quattro angoli retti; dunque se da questa somma si toglie AEF + CFE maggiore di due retti, resterà la somma BEF+EFD minore di due angoli retti. Dunque, secondo il primo caso, le linee EB, FD, prolungate sufficientemente, debbono incontrarsi.

Corollario. Per un punto dato non si può tirare che una sola parallela ad una linea data AB, poichè avendo tirato FE, ad arbitrio, non vi è che una linea FG che faccia la somma de' due angoli BEF+EFG, eguale a due retti. Ogni altra linea FD farebbe la somma de' due angoli BEF+EFD minore o maggiore di due retti, ed incontrerebbe per conseguenza la linea AB.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Se due linee parallele AB, CD (Fig. 38) *sono incontrate da una secante* EF, *la somma degli angoli interni* AGO, GOC *sarà eguale a due angoli retti.*

Poichè, se essa fosse maggiore, o minore, le due linee AB, CD s' incontrerebbero da una parte, o dall'altra (*a*), e non sarebbero parallele.

Corallario I. Se l'angolo GOC è retto, l'angolo AGO sarà pure un angolo retto; dunque ogni linea retta perpendicolare ad una delle parallele è perpendicolare ancora all' altra.

II. Poichè la somma AGO+GOC è uguale a due angoli retti, e la somma GOD + GOC è pure uguale a due angoli retti, se si tolga da una parte e dall'altra GOC, si avrà l'angolo AGO = GOD. D'altronde AGO = BGE, e GOD = COF (*b*), dunque i quattro angoli acuti AGO, BGE, GOD, COF sono uguali fra loro; accade lo stesso dei quattro angoli ottusi AGE, BGO, GOC, DOF. Si può esservare di più che sommando uno dei quattro angoli acuti con uno dei quattro ottusi, la somma sarà sempre eguale a due angoli retti.

(a) *Pr.* 23. — (b) *Pr.* 5.

Scolio. Gli angoli, dei quali abbiamo parlato, paragonati due a due, prendono differenti nomi. Abbiamo già chiamato gli angoli AGO, GOC, *interni da una medesima parte*, gli angoli BGO, GOD hanno il medesimo nome: gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni interni* o semplicemente *alterni*, e così pure gli angoli BGO, GOD. Finalmente si chiamano *interni esterni* gli angoli EGB, GOD, o pure EGA, GOC, ed *alterni-esterni* gli angoli EGB, COB, o sivvero AGE, DOF. Ciò posto, si possono riguardare le seguenti proposizioni come già dimostrate.

1. Gli angoli interni da una medesima parte presi insieme sono eguali a due angoli retti.

2. Gli angoli alterni-interni sono eguali, come pure gli angoli interni-esterni e gli angoli alterni-esterni.

Reciprocamente, se in questo secondo caso due angoli del medesimo nome sono uguali si può conchiudere che le linee son parallele. Sia, per esempio, l'angolo AGO = GOD, Poichè GOC + GOD è eguale a due retti, si avrà pure AGO + GOC uguale a due retti, dunque (*a*) le linee AG, CO sono parallele.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Due linee AB, CD (Fig. 39.) *parallele ad una terza* EF *sono parallele fra loro.*

Si abbassi la secante PQR perpendicolare ad EF, Poichè AB è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare ad AB (*b*). Parimente, poichè CD è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare a CD: dunque AB e CD sono perpendicolari alla medesima linea PQ, dunque esse sono parallele (*c*).

PROPSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Due parallele sono da per tutto egualmente distanti.

Essendo date le due parallele AB, CD (Fig. 40.) se da due punti presi ad arbitrio s'innalzino sopra AB le due perpendicolari EG, FH, le rette EG, FH saranno nel medesimo tempo perpendicolari a CD, (*d*), inoltre dico che queste rette saranno eguali tra loro.

(a) *Pr.* 22.— (b) *Cor.1. pr.* 24.— (c) *Pr.* 21.— (d) *Pr.*24,

Poichè tirando HE, gli angoli GHE, HEF, considerati per rapporto alle parallele AB, CD saranno eguali come alterni-interni (*a*); parimenti poichè le rette EG, FH sono perpendicolari ad una medesima retta AB, ed in conseguenza parallele fra loro, gli angoli GEH, EHF considerati per rapporto alle parallele GE, FH, saranno eguali come alterni-interni; dunque i due triangoli GHF, HEF hanno un lato comune HE adiacente a due angoli rispettivamente eguali; dunque questi due triangoli sono eguali (*b*); dunque il lato EG, che misura la distanza delle parallele AB, CD, dal punto E, è eguale al lato FH, che misura la distanza di queste medesime parallele dal punto F.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Se due angoli BAC, DEF (Fig. 41.) *hanno i lati rispettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso, questi due angoli saranno eguali.*

Prolunghisi, s'è necessario, DE finchè incontri AC in G; l'angolo DEF è uguale a DGC, perchè EF è parallela a GC (*c*); l'angolo DGC è uguale a BAC, perchè DG è parallela ad AB; dunque l'angolo DEF è uguale a BAC.

Scolio. Si mette in questa proposizione la restrizione che il lato EF sia diretto nel medesimo senso di AC, ed ED nel medesimo senso di AB; la ragione di ciò è che se si prolungasse FE verso H, l'angolo DEH avrebbe i suoi lati paralleli a quelli dell'angolo BAC, ma questo non gli sarebbe uguale. In tal caso l'angolo DEH e l'angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

I lati opposti d'un parallelogrammo sono eguali, come ancora gli angoli opposti.

Si tiri la diagonale BD (Fig. 44.), i due triangoli ADB, DBC hanno il lato BD comune; di più, a cagione delle parallele AD, BC, l'angolo ADB = DBC (*d*), ed a cagione delle parallele AB, CD, l'angolo ABD = BDC; dunque i due triango-

(a) *Sc. Pr.* 24.— (b) *Pr.* 7. — (c) *Pr.* 24.— (d) *Pr.* 24.

li ADB, DBC sono uguali (*a*); dunque il lato AB opposto al l'angolo ADB è eguale al lato DC opposto all'angolo eguale DBC, e parimente il terzo lato AD è uguale al terzo lato BC; dunque i lati opposti d'un parallelogrammo sono uguali.

In secondo luogo dall'eguaglianza, de' medesimi triangoli ne segue che l'angolo A è uguale all'angolo C, e che di più l'angolo ADC, composto dai due angoli ADB, BDC, è eguale all'angolo ABC, composto dai due angoli DBC, ABC, dunque gli angoli opposti d'un parallelogrammo sono eguali.

Corollario. Dunque due parallele AB, CD comprese fra due parallele AD, BC sono eguali.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Se in un quadrilatero ABCD (Fig. 44.) *i lati opposti sono eguali, in modo che sia* AB = CD, *ed* AD = BC, *i lati eguali saranno paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.*

Poichè tirando la diagonale BD, i due triangoli ABD, BDC, avranno i tre lati rispettivamente eguali; dunque saranno eguali; quindi l'angolo ADB opposto al lato AB è eguale all'angolo DBC opposto al lato CD: onde (*b*) il lato AD è parallelo a BC. Per una simil ragione AB è parallelo a CD; dunque il quadrilatero ABCD è nn parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Se due lati opposti AB, CD (Fig. 44.) *d'un quadrilatero sono eguali e paralleli, gli altri due lati saranno similmente eguali e paralleli, e la figura* ABCD *è un parallelogrammo.*

Si tiri la diagonale DB. Poichè AB è parallela a CD, gli angoli alterni ABD, BDC sono eguali (*c*); d'altronde il lato AB = DC, il lato DB è comune; dunque il triangolo ABD è uguale al triangolo DBC (*d*); dunque il lato AD = BC; l'angolo ADB = DBC, ed in conseguenza AD è parallela a BC; dunque la figura ABCD è un parallelogrammo.

(a) *Pr.* 7. — (b) *Pr.* 24. — (c) *Pr.* 24. — (d) *Pr.* 6.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

Le due diagonali AC, DB (Fig. 45.) *d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali.*

Poichè paragonando il triangolo ADO col triangolo COB, si trova il lato AD = BC, l'angolo ADO = CBO (*a*), e l'angolo DAO = OCB; dunque questi due triangoli sono eguali (*b*); dunque AO, lato opposto all'angolo ADO è uguale ad OC, lato opposto all'angolo OBC; dunque anche DO = OB.

Scolio Nel caso della losanga i lati AB, BC essendo eguali, i triangoli AOB, OBC hanno i tre lati respettivamente eguali, e sono per conseguenza eguali; d'onde segue che l'angolo AOB = BOC, e quindi le due diagonali di una losanga si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

LIBRO II.

IL CERCHIO

E LA MISURA DEGLI ANGOLI.

DEFINIZIONI

I. La *circonferenza del cerchio* è una linea curva, di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno, che chiamasi *centro* (Fig. 46.).

Il *cerchio* è lo spazio compreso da questa linea curva.

N.B. Talora nel discorso si confonde il cerchio colla sua circonferenza; ma sarà sempre facile ristabilire l'esattezza delle espressioni ricordandosi che il cerchio è una superficie che ha lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

II. Ogni linea retta CA, CE, CD ec. tirata dal centro alla circonferenza si chiama *raggio* o *semidiametro*. Ogni retta come AB, che passa pel centro, e ch'è terminata da ambe le parti alla circonferenza, si chiama *diametro*.

(a) *Pr.* 24. — (b) *Pr.* 27.

In conseguenza della definizione del cerchio tutti i raggi sono eguali : tutti i diametri son pure eguali e doppî del raggio.

III. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza , come FHG.

La *corda* o *sottesa* dell' arco è la linea retta FG , che unisce le due estremità dell' arco.

IV. *Segmento* è la superficie o porzione di cerchio compresa fra l' arco , e la corda.

N. B. Alla medesima corda FG corrispondono sempre due archi FHG , FEG , e per conseguenza anche due segmenti; ma s'intende sempre di parlar del minore, a meno che non si esprima il contrario.

V. *Settore* è la porzione del cerchio compresa tra un arco DE , e i due raggi CD , CE tirati all'estremità dell'arco.

VI. Si chiama *linea iscritta nel cerchio* quella , le cui estremità sono alla circonferenza , come AB , (Fig. 47).

Angolo iscritto un angolo come BAC , il vertice del quale è alla circonferenza , e ch' è formato da due corde.

Triangolo iscritto un triangolo come BAC , i cui tre angoli hanno i loro vertici alla circonferenza.

Ed in generale *figura iscritta* quella , di cui tutti gli angoli hanno i loro vertici alla circonferenza: nel tempo stesso si dice che il cerchio è *circoscritto* ad una tal figura.

VII. Si chiama *secante* una linea , che incontra la circonferenza in due punti ; tale è AB (Fig. 48).

VIII. *Tangente* è una linea , che non ha che un sol punto di comune colla circonferenza ; tale è CD.

Il punto comune M si chiama *punto di contatto.*

IX. Similmente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell'altra allorchè esse non hanno che un sol punto di comune.

X. Un poligono (Fig. 160). è *circoscritto ad un cerchio* quando tutti i suoi lati sono *tangenti* alla circonferenza , in questo caso si dice che il cerchio *è iscritto* nel poligono.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Ogni diametro AB (Fig. 49.) *divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti eguali.*

Poichè , se si applica la figura AEB sopra AFB conservando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sulla linea curva AFB: altrimenti si avrebbero nell' una o nell' altra dei punti disugualmente lontani dal centro ; il che è contra la definizione del cerchio.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Ogni corda è minore del diametro.

In fatti se alle estremità della corda AD (Fig. 49.) si conducano i raggi AC,CD, si avrà la retta $AD < AC + CD$, ossia $AD < AB$.

Corollario. Dunque la più grande linea retta che si possa iscrivere in un cerchio, è eguale al suo diametro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.

Poichè se l' incontrasse in tre; questi tre punti sarebbero ugualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque tre rette uguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta; lo che è impossibile (*a*).

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

In un medesimo cerchio, o in cerchi eguali, gli archi eguali sono sottesi da corde eguali, e reciprocamente le corde eguali sottendono archi eguali.

Sia il raggio AC (Fig. 50.) eguale al raggio EO, e l'arco AMD eguale all' arco ENG; dico che la corda AD sarà eguale alla corda EG.

Poichè essendo il diametro AB eguale al diametro EF, il semicerchio AMDB potrà applicarsi esattamente sul semicerchio ENGF, e la linea curva AMDB coinciderà esattamente colla linea curva ENGF, Ma si suppone la parte AMD eguale alla parte ENG, dunque il punto D cadrà sul punto G; e quindi la corda AD è eguale alla corda EG.

Reciprocamente supponendo sempre il raggio $AC = EO$, se la corda $AD = EG$, dico che l'arco AMD sarà eguale all' arco ENG.

(a) Pr. 16, 1.

Poichè, tirando i raggi, CD, OG, i due triangoli ACD, EOG, avranno i tre lati rispettivamente eguali, cioè AC=EO, CD=OG, ed AD=EG; dunque questi triangoli sono eguali (*a*) e perciò l'angolo ACD=EOG. Ma ponendo il semicerchio ADB sul suo eguale EGF, poichè l'angolo ACD=EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è eguale all'arco ENG.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Nel medesimo cerchio, o in cerchi uguali, un arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè gli archi di cui si tratta siano minori della semicirconferenza.

In fatti sia l'arco AMH (Fig. 50.) maggiore di AMD, e siano tirate le corde AD, AH, ed i raggi CD, CH: i due lati AC, CH del triangolo ACH sono eguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD; l'angolo ACH è maggiore di ACD, dunque (*b*) il terzo lato AH è maggiore del terzo AD; onde la corda maggiore è quella che sottende l'arco maggiore.

Reciprocamente, se la corda AH si suppone maggiore di AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli che l'angolo ACH è maggiore di ACD, e perciò l'arco AH è maggiore di AD.

Scolio. Noi supponiamo che gli archi di cui si tratta, siano minori della mezza circonferenza. Se essi fossero maggiori avrebbe luogo la proprietà contraria, cioè l'arco aumentandosi, la corda diminuirebbe, e ~~reciprocamente~~; così essendo l'arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD del primo è minore della corda AH del secondo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il raggio CG (Fig. 51.) *perpendicolare ad una corda* AB, *divide questa corda, e l'arco sotteso* AGB, *l'uno e l'altro in due parti eguali.*

Si tirino i raggi CA, CB, questi raggi sono per rapporto alla perpendicolare CD, due oblique eguali; dunque esse si allontanano egualmente dalla perpendicolare (*c*); onde AD=DB.

(a) 11, 1. — (b) 19, 1. — (c) 16, 1.

In secondo luogo, poichè AD=DB; CG è una perpendicolare innalzata dalla metà di AB; perciò (*a*) ogni punto di questa perpendicolare dev' essere egualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG=BG. Ma se la corda AG è uguale alla corda GB, l'arco AG sarà eguale all'arco GB (*b*); dunque il raggio CG, perpendicolare alla corda AB, divide l'arco sotteso da questa corda in due parti eguali nel punto G.

Scolio. Il centro C, il punto medio D della corda AB, e il punto medio G dell'arco sotteso da questa corda, sono tre punti situati sopra una medesima retta perpendicolare alla corda. Ora bastano due punti per determinare la posizione d'una linea retta; dunque ogni linea retta che passa per due di questi punti, passerà necessariamente pel terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare innalzata dal punto medio di una corda passa per lo centro, e pel punto medio dell'arco sotteso dalla medesima corda.*

In fatti questa perpendicolare è la stessa di quella che sarebbe abbassata dal centro sulla medesima corda, giacchè passano ambedue pel punto medio della medesima corda.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Per tre punti dati A, B, C, (Fig. 52.) *non in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza, ma non se ne può far passare che una sola.*

Si congiungano AB, BC, e si dividano queste due rette in due parti eguali colle perpendicolari DE, FG; dico primieramente che queste perpendicolari s'incontreranno in un punto O.

In fatti le linee DE, FG si taglieranno necessariamente, se non son parallele. Or supponiamo che fossero parallele; la linea AB perpendicolare a DE sarebbe perpendicolare ad FG (*c*), e l'angolo K sarebbe retto; ma BK, prolungamento di BD, è differente da BF, poichè i tre punti A, B, C, non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK, abbassate da uno stesso punto sulla medesima retta, lo che è impossibile (*d*); dunque le perpendicolari DE, FG, si taglieranno sempre in un punto O.

(*a*) 17, 1. — (b) 4. — (*c*) 24, 1. — (d) 15, 1.

Ora il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad egual distanza da' due punti A e B (*a*): il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è ad egual distanza dai due punti B, C; dunque le tre distanze, OA, OB, OC, sono eguali; e perciò la circonferenza descritta col centro O, e col raggio OB passerà per i tre punti dati A, B, C.

Resta così dimostrato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati, non in linea retta; dico di più che non se ne può far passare che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza che passasse per i tre punti dati A, B, C, il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE (*b*), perchè allora esso sarebbe disugualmente lontano da A, e da B; non potrebbe essere neppure fuori della linea FG per una simil ragione: dunque sarebbe nel tempo stesso sulle due linee DE, FG. Or due linee rette non posson tagliarsi in più d' un punto; dunque non v'è che una sola circonferenza che possa passare per tre punti dati.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Due corde eguali sono egualmente lontane dal centro, e di due corde disuguali, la minore è la più distante dal centro.

1.° Sia la corda AB=DE (Fig. 53.): si dividano queste corde in due parti eguali colle perpendicolari CF, CG, e si tirino i raggi CA, CD.

I triangoli rettangoli CAF, DCG, hanno le ipotenuse CA, CD, eguali; di più il lato AF, metà di AB, è eguale al lato DG; metà di DE: dunque questi triangoli sono eguali (*c*), e perciò il terzo lato CF è eguale al terzo CG; dunque 1.° le due corde eguali AB, DE, sono egualmente lontane dal centro.

2.° Sia la corda AH maggiore di DE, l'arco AKH sarà maggiore dell'arco DME (*d*): sull'arco AKH prendasi la parte ANB=DME, si tiri la corda AB, e si abbassi CF perpendicolare su questa corda, e CI perpendicolare sopra AH; è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO maggiore di CI (*e*); dun-

(a) 17, 1.—(b) 17, 1.—(c) 18, 1.—(d) 5.—(e) 16, 1.

que con più ragione CF>CI. Ma CF=CG, poichè le corde AB, DE sono eguali; dunque si ha CG>CI; e perciò di due corde disuguali la minore è la più lontana dal centro.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

La perpendicolare BD (Fig. 54.) *innalzata all' estremità del raggio* CA, *è una tangente alla circonferenza.*

Poichè ogni obliqua CE è maggiore della perpendicolare CA (*a*); perciò il punto E è fuori del cerchio; duuque la linea BD non ha che il solo punto A comune colla circonferenza; dunque BD è una tangente (*b*).

Scolio. Non si può condurre da un punto dato A che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè se si potesse condurre un'altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque per rapporto a questa nuova tangente, il raggio CA sarebbe un'obliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro su questa tangente sarebbe minore di CA, dunque questa pretesa tangente entrerebbe dentro del cerchio, e sarebbe perciò una secante.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Due parallele AB, DE (Fig. 55,) *intercettano sulla circonferenza archi uguali* MN, PQ.

Possono accadere tre casi.

1.° Se le due parallele sono secanti, si tiri il raggio CH perpendicolare alla corda MP, esso sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua parallela NQ (*c*); dunque il punto H sarà nel tempo stesso il punto medio dell'arco MHP, e quello dell' arco NHQ (*d*); si avrà dunque l' arco MH=HP, e l'arco NH=HQ, da ciò risulta MH—NH=HP—HQ, cioè a dire MN=PQ.

2.° Se delle due parallele AB, DE (Fig: 56.) una è secante, l'altra tangente: si tiri al punto del contatto H il raggio CH: questo raggio sarà perpendicolare alla tangente DE (*e*) ed anche alla sua parallella MP. Ma poichè CH é perpendicolare

(a) 16, 1 —(b) *Def.* 8. — (c) 24, 1. — (d) 6. — (e) 9.

alla corda MP, il punto H è il punto medio dell'arco MHP, dunque gli archi MH, HP, compresi tra le parallele AB, DE sono eguali.

3.° In fine se le due parallele DE, IL sono tangenti; una in H, l'altra in K, si tiri la secante parallela AB, si avrà, per quello che abbiamo dimostrato, MH=HP, ed MK=KP; dunque l'arco intero HMK=HPK; e si vede inoltre che ciascuno di questi archi è una mezza circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Se due circonferenze si tagliano, la retta che passa per i loro centri sarà perpendicolare alla corda che unisce i punti d'intersezione, e la dividerà in due parti eguali.

In fatti la linea AB, (Fig. 57, e 58.) che unisce i punti d'intersezione, è una corda comune ai due cerchi. Ora, se dalla metà di questa corda si alzi una perpendicolare, essa deve passare per ciascuno dei due centri C e D (*a*). Ma per due punti dati non si può tirare che una sola linea retta; dunque la linea retta che passa per i centri, sarà perpendicolare alla corda comune, e passerà pel punto medio di essa.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se la distanza de' due centri è minore della somma dei raggi, e se nel tempo stesso il raggio maggiore è minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri, i due cerchi si taglieranno.

In fatti affinchè abbia luogo l'intersezione, bisogna che il triangolo CAD (Fig. 57, e 58.) sia possibile: bisogna dunque non solamente che $CD < AC+AD$ ma che anche il raggio maggiore $AD < AC+CD$. Ora, ogni volta che il triangolo CAD potrà esser costrutto, è chiaro che le circonferenze descritte coi centri C e D si taglieranno in A e B.

(a) 6.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se la distanza CD (Fig. 59.) *de' centri di due cerchi è eguale alla somma dei loro raggi* CA, AD, *questi due cerchi si toccheranno esternamente.*

È chiaro che avranno il punto A comune; ma essi non avranno che questo punto solo: poichè, per avere due punti comuni bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma de' raggi (*a*).

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se la distanza C D (Fig. 60) *de' centri di due cerchi è eguale alla differenza dei loro raggi* CA, DA, *questi due cerchi si toccheranno internamente.*

In primo è chiaro che questi cerchi hanno il punto A comune: essi non ne possono avere alcun altro; poichè altrimenti bisognerebbe che il raggio maggiore AD fosse minore della somma del raggio maggiore AC e della distanza dei centri DC (*b*); il che non ha luogo.

Corollario. Dunque, se due cerchi si toccano, sia internamente, sia esternamente, i centri ed il punto del contatto sono sulla medesima linea retta.

Scolio. Tutti i cerchi che hanno i loro centri sulla retta CD, (Fig. 59, e 60) e che passano pel punto A, sono tangenti gli uni agli altri, cioè non hanno fra loro che il solo punto A di comune. E se pel punto A si conduca AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a tutti questi cerchi.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Nel medesimo cerchio, o in cerchi eguali, gli angoli eguali ACB, DCE (Fig. 61.), *il cui vertice è al centro, intercettano sulla circonferenza archi eguali* AB, DE.

(a) 12. — (b) 12.

Reciprocamente, se gli archi AB, DE *sono eguali, gli angoli* ACB, DCE *saranno pure eguali.*

Poidhè 1.° se l'angolo ACB è eguale all'angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno sull'altro; e siccome i loro lati sono eguali, è chiaro che il punto A cadrà in D, e il punto B in E. Ma allora l'arco AB deve pur cadere sull'arco DE; poichè se i due archi non si confondessero in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'alrto de' punti disugualmente lontani dal centro, il che è impossibile; dunque l'arco AB=DE.

2.° Se si suppone AB=DE, dico che l'angolo ACB sarà eguale all'angolo DCE; poichè se questi angoli non sono eguali, sia ACB il maggiore, e sia preso ACI=DCE; si avrà per quello che si è dimostrato, AI=DE; ma, per supposizione, l'arco AB=DE; dunque si avrebbe AI=AB, ossia la parte eguale al tutto, il che è impossibile; dunque l'angolo ACB=DCE.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Nel medesimo cerchio o in due cerchi eguali, se due angoli al centro ACB, DCE (Fig. 62.) *stanno tra loro come due numeri interi, gli archi intercetti* AB, DE, *saranno tra loro come i medesimi numeri, e si avrà questa proporzione:*

angolo ACB : angolo DCE : : arco AB : arco DE.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 stà a 4, ovvero, il che torna lo stesso, supponiamo che l'angolo M, che servirà di misura comune, sia contenuto sette volte nell'angolo ACB, e quattro nell'angolo DCE. Gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, ec., DC*x*, *x*C*y*, ec.; essendo eguali fra loro, gli archi parziali A*m*, *mn*, *np*, ec. D*x*, *xy*, ec. saranno pure tra loro eguali (*a*); dunque l'arco intero AB starà all'arco intero DE come 7 stà a 4. Ora è manifesto che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo quando invece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque; dunque se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri interi, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE.

Scolio. Reciprocamente, se gli archi AB, DE stessero tra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE, sta-

(*a*) *Prop.* 15.

rebbero tra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE : : AB : DE; poichè gli archi parziali A*m*, *mn*, ec., D*x*, *xy*, ec. essendo eguali, gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, ec., DC*x*, *x*C*y*, ec. sono ancora eguali.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Qualunque sia il rapporto de' due angoli ACB, ACD (Fig. 63.), *questi due angoli staranno sempre tra loro come gli archi* AB, AD, *intercetti tra i loro lati e descritti da' loro vertici come centri con raggi eguali.*

Supponiamo l'angolo minore situato dentro il maggiore; se non è vero la proposizione enunciata, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB sta ad un arco maggiore, o minore di AD. Supponiamo quest'arco maggiore, e rappresentiamolo con AO; avremo così:

angolo ACB : angolo ACD : : arco AB : arco AO.

Immaginiamo ora che l'arco AB sia diviso in parti eguali, ciascuna delle quali sia minore di DO; vi sarà almeno un punto di divisione fra D ed O; sia I questo punto, e si tiri CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, e si avrà pel teorema precedente:

angolo ACB : angolo ACI : : arco AB : arco AI.

Paragonando queste due proporzioni una coll'altra, ed osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò

angolo ACD : angolo ACI : : arco AO : arco AI.

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l'angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI: ora al contrario egli è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB stà ad un arco maggiore di AD,

Si dimostrebbe con un ragionamento affatto simile che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AD; dunque esso è esattamente AD, dunque si ha la proporzione:

angolo ACB : angolo ACD : : arco AB : arco AD.

Corollario. Poichè l'angolo al centro del cerchio e l'arco intercetto fra i suoi lati hanno un tal legame, che quando l'uno aumenta o diminuisce in un rapporto qualunque, l'altro aumenta o diminuisce nel medesimo rapporto, siamo in diritto di stabilire una di queste grandezze per misura del-

l'altra; laonde noi prenderemo da qui innanzi l'arco AB per la misura dell'angolo ACB. Bisogna solamente osservare, ne paragonare gli angoli fra di loro, che gli archi che servono loro di misura, debbono essere descritti con raggi eguali; poichè questo è ciò che suppongono tutte la precedenti proposizioni.

Scolio I. Sembra più naturale il misurar una quantità con un'altra quantità della medesima specie, e dietro questo principio converrebbe riportar tutti gli angoli all'angolo retto: così l'angolo retto essendo l'unità di misura, un angolo acuto sarebbe espresso da un numero compreso fra 0 e 1, ed un angolo ottuso da un numero tra 1 e 2. Ma questa maniera d'esprimere gli angoli non sarebbe la più comoda nella pratica; si è trovato molto più semplice il misurarli con archi di cerchio, a motivo della facilità di fare archi eguali ad archi dati, e per molte altre ragioni. Del rimanente, sè la misura degli angoli per mezzo degli archi di cerchio è in qualche modo indiretta, non è meno facile l'ottenere col loro mezzo la misura diretta, ed assoluta: poichè, se si paragona l'arco che serve di misura ad un angolo, colla quarta parte della circonferenza, si avrà il rapporto dell'angolo dato all'angolo retto, che è la misura assoluta.

Scolio II. Tutto ciò che è stato dimostrato nelle tre proposizioni antecedenti per la comparazione degli angoli cogli archi, ha luogo egualmente per la comparazione de' settori cogli archi, poichè i settori sono eguali quando lo sono gli angoli, e in generale sono proporzionali agli angoli, dunque *due settori* ACB, ACD, *presi nel medesimo cerchio o in cerchi eguali, stanno fra loro come gli archi* AB, AD *basi di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di cerchio che servono di misura agli angoli, possono parimente servir di misura ai differenti settori di un medesimo cerchio, o di cerchi eguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

L'angolo iscritto BAD (Fig. 64, e 65.) *ha per misura la metà dell'arco* BD *compreso tra i suoi lati.*

Supponiamo in primo luogo che il centro del cerchio sia situato dentro l'angolo BAD (Fig. 64); si tirino il diametro AE ed i raggi CB, CD. L'angolo BCE, esterno rispetto al triangolo ABC, è eguale alla somma dei due interni CAB,

ABC (a): ma essendo il triangolo BAC isoscele, l'angolo CAB =ABC: adunque l' angolo BCE è doppio di BAC. L'angolo BCE, come l' angolo al centro, ha per misura l' arco BE; dunque l' angolo BAC avrà per misura la metà di BE. Per una simil ragione l' angolo CAD avrà per misura la metà di ED; dunque BAC+CAD ossia BAD avrà per misura la metà di BE+ED, ossia la metà di BD.

Supponiamo in secondo luogo che il centro C, (Fig. 65.) sia situato fuori dell'angolo BAD; allora tirando il diametro AE, l' angolo BAE avrà per misura la metà di BE, e l'angolo DAE la metà di DE; dunque la lor differenza BAD avrà per misura la metà di BE meno la metà di ED, ossia la metà di BD.

Dunque ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell' arco compreso tra i suoi lati.

Corollario. I. Tutti gli angoli BAC, BDC, ec (Fig. 66.) iscritti nel medesimo segmento di cerchio sono uguali, perchè hanno per misura la metà dell' istesso arco BOC:

II. Ogni angolo BAD (Fig. 67.) iscritto nel semicerchio è un angolo retto, poichè ha per misura la metà della mezza circonferenza BOD, ossia la quarta parte della circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in un' altra maniera, si tiri il raggio AC: il triangolo BAC è isoscele: onde l'angolo BAC=ABC, il triangolo CAD è parimente isoscele, e l'angolo CAD=ADC; dunque BAC+CAD, ovvero BAD=ABD+ADB. Ma se i due angoli B, e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivaleranno a due volte l' angolo BAD, essi equivalgono d'altronde a due angoli retti, dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

III. Ogni angolo BAC (Fig. 66.) iscritto in un segmento maggiore del semicerchio è un angolo acuto, poichè ha per misura la metà dell' arco BOC minore d' una mezza circonferenza.

Ed ogni angolo BOC iscritto in un segmento minore del semicerchio è un angolo ottuso, poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore d' una mezza circonferenza.

IV. Gli angoli opposti A e C d' un quadrilatero iscritto ABCD (Fig. 68.) equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l' angolo BAD ha per misura la metà dell' arco BCD, l' angolo BCD ha per misura la metà dell' arco BAD, dunque i due angoli BAD, BCD, presi insieme, hanno per mi-

(a) 19, 1.

sura la metà della circonferenza; dunque la loro somma equivale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

L' angolo BAC (Fig. 69.) *formato da una tangente e da una corda, ha per misura la metà dell' arco* AMDC *compreso fra i suoi lati.*

Dal punto di contatto A si tiri il diametro AD; l'angolo BAD è retto (*a*); esso ha per misura la metà della mezza circonferenza AMD; l' angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC, ossia BAC, ha per misura la metà di AMD, più la metà di DC, ovvero la metà dell' arco intero AMDC.

Si dimostrerebbe similmente che l' angolo CAE ha per misura la metà dell' arco AC compreso fra i suoi lati.

PROBLEMI RELATIVI A DUE PRIMI LIBRI.

PROBLEMA I.

Dividere la retta data AB (Fig. 70.) *in due parti eguali.*

Da' punti A e B, come centri, e con un raggio maggiore della metà di AB, si descrivano due archi che si taglino in D; il punto D sarà egualmente lontano da' punti A e B: si segni nella stessa maniera al di sopra, o al di sotto della linea AB un secondo punto E egualmente lontano dai punti A e B; per i due punti D, E si tiri in linea DE: dico che DE taglierà la linea AB in due parti eguali nel punto C.

Poichè i punti D ed E, essendo ciascuno egualmente distante dalle estremità A e B, debbono trovarsi ambedue nella perpendicolare innalzata sulla metà di AB. Ma per due punti dati non può passare che una sola linea retta; dunque la linea DE sarà quella stessa perpendicolare che taglia la linea AB in due parti eguali nel punto C.

PROBLEMA II.

Da un punto A (Fig. 71.) *dato sulla linea* BC *alzare una perpendicolare a questa linea.*

(a) *Pr.* 9.

Si prendano i punti B e C ad eguale distanza da A; indi dai punti B e C, come centri, e con un raggio maggiore di BA, si descrivano due archi che si taglino in D; si tiri AB, questa sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, il punto D, essendo egualmente lontano da B e da C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sul mezzo di BC; dunque AD è questa perpendicolare.

Scolio. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto dato A sopra una retta data BC.

PROBLEMA III.

Da un punto A (Fig. 72.) *dato fuori della retta* BD *abbassare una perpendicolare sopra questa retta.*

Dal punto A, come centro, e con un raggio sufficientemente grande si descriva un arco che tagli la linea BD nei due punti B e D, si segni in seguito un punto E egualmente distante dai punti B e D, e si tiri AE che sarà la perpendicolare cercata.

In fatti i due punti A ed E sono ciascuno egualmente distante dai punti B e D: dunque la linea AE è perpendicolare sulla metà di BD.

PROBLEMA IV.

Al punto A *della linea* AB (Fig. 73.), *fare un angolo eguale all' angolo dato* K.

Dal vertice K, come centro, e con un raggio ad arbitrio si descriva l'arco IL terminato ai due lati dell' angolo: dal punto A, come centro, e con un raggio AB eguale KI, si descriva l' arco indefinito BO; si prenda poi un raggio eguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e col medesimo raggio si descriva un arco che tagli in D l' arco indefinito BO; si congiunga AD, e l' angolo DAB sarà eguale all' angolo dato K.

In fatti i due archi BD, LI, hanno raggi eguali e corde eguali, dunque sono eguali (*a*) e perciò l'angolo BAD=IKL.

PROBLEMA V.

Dividere un angolo o un arco dato in due parti eguali.

1.° Se bisogna dividere l' arco AB (Fig. 74.) in due par-

(*a*) *Prop.* 4. 2.

ti eguali, dai punti A e B, come centri; e con uno stesso raggio, si descrivano due archi che si taglino in D; pel punto D, e pel centro C si tiri CD, che taglierà l'arco AB in due parti eguali nel punto E.

In fatti ciascuno dei punti C e D è egualmente distante dalle estremità A e B della corda AB, dunque la retta CD è perpendicolare sulla metà di questa corda; essa dunque divide l'arco AB in due parti eguali nel punto E *(a)*.

2.° Se bisogna dividere in due parti eguali l'angolo ACB, si comincerà dal descrivere col vertice C, come centro, l'arco AB, e si procederà nel resto come si è detto qui sopra. È chiaro che la linea CD dividerà in due parti eguali l'angolo ACB.

Scolio. Si può colla medesima costruzione dividere ciascuna della metà AE, EB in due parti eguali; quindi mediante le successive suddivisioni, si dividerà un angolo, o un arco in quattro parti eguali, in otto, in sedici, ec.

PROBLEMA VI.

Per un punto dato A (Fig. 75.) *tirare una parallela alla linea retta* BC.

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande, si descriva l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e col medesimo raggio descrivasi l'arco AF; si prenda ED=AF, e si tiri AD, questa sarà la parallela richiesta.

Poichè, congiungendo AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono eguali; dunque le linee AD, EF sono parallele *(b)*.

PROBLEMA VII.

Essendo dati due angoli A, B (Fig. 76.) *di un triangolo trovare il terzo.*

Si tiri la linea indefinita DEF; si faccia al punto E l'angolo DEC=A, e l'angolo CEH=B; l'angolo restante HEF sarà il terzo angolo cercato; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti.

PROBLEMA VIII.

Essendo dati due lati B *e* C (Fig. 77.), *d'un triangolo, e l'angolo* A *che essi comprendono, descrivere il triangolo.*

(a) *Pr.* 6. 2. — (b) *Pr.* 25. 1.

Si tiri la linea indefinita DE, si faccia al punto D l'angolo EDF eguale all' angolo dato A; si taglino in seguito DG=B; DH=C, e si congiunga GH; DGH sarà il triangolo cercato.

PROBLEMA IX.

Essendo dati un lato e due angoli d' un triangolo, descrivere il triangolo.

I due angoli dati saranno o tutti due adiacenti al lato dato, o uno adiacente, e l' altro opposto. In questo ultimo caso si determini il terzo (*a*), si avranno così i due angoli adiacenti. Ciò posto, si tiri la retta DE (Fig. 78.) uguale al lato dato; facciasi al punto D l'angolo EDF uguale ed uno degli angoli adiacenti, ed al punto E l'angolo DEG eguale all' altro; le due linee DF, EG si taglieranno in H, e DEH sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA X.

Essendo dati i tre lati, A, B, C, (Fig. 79.), *d' un triangolo descrivere il triangolo.*

Si tiri DE eguale al lato A; dal punto E come centro, e con un raggio eguale al secondo lato B, descrivasi un arco; del punto D, come centro, e con un raggio eguale al terzo lato C, descrivasi un altr' arco, che taglierà il primo in F; si congiungano DF, EF, e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio. Se uno dei lati fosse maggiore della somma degli altri due archi non si taglierebbero; ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma di due lati, presi come si vorrà, sia più grande del terzo.

PROBLEMA XI.

Essendo dati due lati A, *e* B (Fig. 80.) *d'un triangolo, coll' angolo* C *opposto al lato* B, *descrivere il triangolo.*

Vi sono due casi: 1.° se l'angolo C è retto od ottuso, facciasi l' angolo EDF eguale all' angolo C, si tagli DE=A, dal punto E come centro, e con un raggio eguale al lato dato B descrivasi un arco che tagli in F la linea DF, si congiunga EF, e DEF sarà il triangolo richiesto.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore

(a) *Prob.* 7.

di A; poichè l'angolo C essendo retto, od ottuso, è il maggiore degli angoli del triangolo; dunque il lato opposto dev' esser pure il maggiore.

2.° Se l'angolo C (Fig. 81.) è acuto, e B sia maggiore di A, ha sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo cercato.

Ma se l'angolo C (Fig. 82.) essendo acuto, il lato B fosse minore di A, allora l'arco descritto dal centro E col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla medesima parte per rapporto a D, dunque vi saranno due triangoli DEF, DEG, che soddisferanno egualmente al problema.

Scolio. Il problema sarebbe impossibile in tutti i casi se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sulla retta DF.

PROBLEMA XII.

Essendo dati i lati adiacenti A, *e* B (Fig. 83.) *di un parallelogrammo coll' angolo* C *da essi compreso*, *descrivere il parallelogrammo.*

Si tiri la linea DE=A, facciasi al punto D l'angolo FDE =C, si tagli DF=B; si descrivano due archi, uno dal punto F come centro, e con un raggio FG=DE, l'altro dal punto E come centro, e con un raggio EG=DF; al punto G, ove questi due archi si tagliano si tirino FG, EG; sarà DEGF il parallelogrammo cercato.

Poichè, per costruzione, i lati opposti sono eguali, dunque la figura descritta è un parallelogrammo (*a*), e questo parallelogrammo è formato coi lati dati e l'angolo dato.

Corollario. Se l'angolo dato è retto, la figura sarà un rettangolo; se in oltre i lati sono eguali, sarà un quadrato.

PROBLEMA XIII.

Trovare il centro d'un cerchio, o d'arco dato.

Si prendano ad arbitrio nella circonferenza, o nell' arco tre punti A, B, C (Fig. 84.); si tirino o si supponga che si tirino le rette AB e BC, si dividano queste due linee in due parti eguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG; il punto O, ove queste perpendicolari s' incontrano, sarà il centro cercato.

(a) *Pr.* 30. 1.

Scolio. La medesima costruzione serve a far passare una circonferenza di cerchio per tre punti dati A, B, C, come pure a descrivere una circonferenza, nella quale il triangolo dato ABC sia iscritto.

PROBLEMA XIV.

Per un punto dato tirare una tangente ad un cerchio dato.

Se il punto dato A (Fig. 85.) è sulla circonferenza, tirisi il raggio CA, e si tiri AD perpendicolare a CA; AD sarà la tangente cercata (*a*).

Se il punto A (Fig. 86.) è fuori del cerchio, si uniscano il punto A ed il centro colla linea retta CA; dividasi CA in due parti eguali nel punto O: dal punto O, come centro, e col raggio OC descrivasi una circonferenza che taglierà la circonferenza data nel punto B; si tiri AB; ed AB sarà la tangente cercata.

Poichè, tirando CB, l'angolo CBA iscritto nel semicerchio è un angolo retto (*b*), dunque AB è perpendicolare all'estremità del raggio CB; essa dunque è tangente.

Scolio. Essendo il punto A fuori del cerchio, si vede che vi sono sempre due tangenti eguali AB, AD, che passano pel punto A; esse sono eguali, perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l'ipotenusa CA comune, ed il lato CB=CD; quindi essi sono eguali (*c*); dunque AD=AB, e nel tempo stesso l'angolo CAD=CAB.

PROBLEMA XV.

Iscrivere un cerchio in un triangolo dato ABC. (Fig.87.)

Si dividano gli angoli A e B in due parti eguali colle rette AO, e BO che s'incontreranno in O; dal punto O si abbassino le perpendicolari OD, OE, OF su i tre lati del triangolo; dico che queste perpendicolari saranno eguali tra loro; poichè, per costruzione, l'angolo DAO=OAF, l'angolo retto ADO=AFO; dunque il terzo angolo AOD è eguale al terzo AOF. D'altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato eguale sono eguali; dunque questi due triangoli sono eguali; e perciò DO=OF. Si dimostrerà similmente che i due triangoli BOD, BOE, sono eguali; onde OD=OE, dunque le tre perpendicolari OD, OE, OF sono eguali fra loro.

(a) *Pr.* 9, 2. — (b) *Pr.* 18, 2. — (c) *Pr.* 18, 1.

Ora, se dal punto O come centro, e col raggio OD si descriva una circonferenza, è chiaro che questa sarà iscritta nel triangolo ABC; poichè il lato AB, perpendicolare all'estremità del raggio OD, è una tangente, ed è lo stesso dei lati BC, AC.

Scolio. Le tre linee rette che dividono in due parti eguali i tre angoli d'un triangolo, concorrono in un medesimo punto.

PROBLEMA XVI.

Sopra una linea retta AB (Fig. 88 e 89.) *descrivere un segmento* capace *dell' angolo dato* C, *cioè un segmento tale che tutti gli angoli in esso iscritti, siano eguali all'angolo dato* C.

Prolungasi AB verso D, si faccia al punto B l' angolo DBE=C: si tiri BO perpendicolare a BE, e GO perpendicolare sulla metà di AB; dal punto d'incontro O, come centro, e col raggio OB descrivasi un cerchio, il segmento richiesto sarà AMB.

Poichè, siccome BF è perpendicolare all' estremità del raggio OB, sarà BF una tangente, e l'angolo ABF avrà per misura la metà dell'arco AKB (*a*). D' altronde l'angolo AMB, come angolo iscritto, ha per misura la metà dell' arco AKB; dunque l'angolo AMB=ABF=EBD=C; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono uguali all'angolo dato C.

Scolio. Se l' angolo dato fosse retto, il segmento cercato sarebbe il semicerchio descritto sul diametro.

PROBLEMA XVII.

Trovare il rapporto numerico di due linee rette AB, CD, (Fig. 90.) *qualora queste due linee hanno tra loro una misura comune.*

Portasi la minore CD sulla maggiore AB tante volte quante può esservi contenuta, per esempio, due volte, e col resto BE.

Portasi il resto BE sulla linea CD tante volte quante può esservi contenuto; una volta, per esempio, e col resto DF.

Portasi il secondo resto DF sul primo BE tante volte quante può esservi contenuto; una volta per esempio, e col resto BG.

Portasi il terzo resto BG sul secondo DF tante volte quante può esservi contenuto.

Continuasi così finchè abbiasi un resto, che sia contenuto un numero esatto di volte nel suo precedente.

(a) *Pr.* 19. 2.

Allora quest' ultimo resto sarà la comune misura delle linee proposte, e riguardandolo come l'unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti, e finalmente quelli delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte esattamente in FD, BG sarà la comune misura delle due linee proposte Sia BG= 1, si avrà FD= 2; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque EB= 3; CD contiene una volta EB più FD, dunque CD= 5; finalmente AB contiene due volte CD più EB, dunque AB= 13; dunque il rapporto delle due linee AB, CD, è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $^{13}/_{5}$, e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $^{5}/_{13}$.

Scolio. Il metodo esposto è quel medesimo che prescrive l'aritmetica per trovare il massimo comun divisore di due numeri, quindi non ha bisogno d' altra dimostrazione.

Può accadere che, per quanto lungi si continui l' operazione, non si trovi mai un resto che sia contenuto un numero esatto di volte nel precedente. Allora le due linee non hanno alcuna misura comune, e son quelle che si chiamano *incommensurabili:* se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto della diagonale, al lato del quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in numeri, ma trascurando l' ultimo resto, si troverà un rapporto più o meno approssimativo, secondochè più o meno sarà stata spinta avanti l' operazione.

PROBLEMA XVIII.

Essendo dati due angoli A, *e* B, (Fig. 91.) *trovare la loro misura comune, se l' abbiano, e quindi il loro rapporto in numeri.*

Si descrivano con raggi eguali gli archi CD, EF, che servono di misura a questi angoli, si proceda in seguito, per la comparazione degli archi CD, EF, come nel problema precedente, poichè un arco può portarsi sopra un arco dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Si giungerà così alla misura comune degli archi CD, EF, se l' abbiano, ed al loro rapporto in numeri. Questo rapporto sarà lo stesso di quello degli angoli dati (*a*), e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

(a) *Pr.* 17, 2.

Scolio. Si può così trovare il valore assoluto d'un angolo paragonando l'arco che gli serve di misura, a tutta la circonferenza: per esempio, se l'arco CD stà alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà i $^3/_{25}$ di quattro angoli retti ovvero $^{12}/_{25}$ d'un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune, allora non si avranno per gli angoli se non che de' rapporti in numeri più o meno approssimativi, secondo che l'operazione sarà stata spinta più o meno lungi.

LIBRO III.

LE PROPOSIZIONI DELLE FIGURE.

DEFINIZIONI.

I. Si chiamano *figure equivalenti* quelle, le cui superficie sono eguali.

Due figure possono essere equivalenti quantunque siano affatto dissimili, per esempio, un cerchio può essere equivalente ad un quadrato, un triangolo ad un rettangolo, ec.

La denominazione di figure eguali sarà conservata a quelle, che essendo applicate l'una sull'altra coincidano in tutti i lor punti: tali sono due cerchi i cui raggi siano eguali; due triangoli, i cui tre lati siano rispettivamente eguali, ec.

II. Due figure sono *simili*, quando hanno gli angoli rispettivamente eguali, ed i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s'intendono quelli, che hanno la medesima posizione nelle due figure, o che sono adiacenti ad angoli eguali. Questi medesimi angoli si chiamano angoli *omologhi*.

Due figure eguali sono sempre simili, ma due figure simili possono essere molto disuguali.

III. In due cerchi differenti si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili*, quelli che corrispondono ad angoli al centro eguali..

Così; essendo l'angolo A (Fig. 92.) eguale all'angolo O l'arco BC è simile all'arco DE, il settore ABC al settore ODE, ec.

IV. L'*altezza* d'un parallelogrammo è la perpendicolare,

EF, (Fig. 93.) che misura la distanza di due lati opposti AB, CD, presi per basi.

V. L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare AD (Fig. 94.) abbassata dal vertice d'un angolo A sul lato opposto BC, preso per base.

VI. L'*altezza* del trapezio è la perpendicolare EF (Fig. 95.) tirata fra i suoi due lati paralleli AB, CD.

VII. *Aia* o superficie d'una figura sono termini presso a poco sinonimi. L'aia indica più particolarmente la quantità superficiale della figura in quanto che dessa è misurata, o paragonata ad altre superficie.

» *N. B.* Per l'intelligenza di questo libro, e dei seguenti bisogna aver presente la teorica delle proporzioni, per la quale rimandiamo ai trattati ordinari di aritmetica, e di algebra. Faremo solamente un'osservazione, che è importantissima per ristabilire il vero senso delle proposizioni, e dissipare ogni oscurità sì nel loro enunciato, che nelle loro dimostrazioni.

» Se si abbia la proporzione $A : B :: C : D$, si sa che il prodotto degli estremi $A \times D$ è eguale al prodotto de' medî $B \times C$.

» Questa verità è incontrastabile quanto ai numeri; dessa lo è pure circa alle grandezze di qualunque sorte, purchè si esprimano, o s'immaginino espresse in numeri, il che si può sempre supporre: per esempio, se A, B, C, D sono linee, si può immaginare che una di queste quattro linee, ovvero, una quinta, se si voglia, serva di misura comune a tutte, o sia presa per unità: allora A, B, C, D rappresentano ciascuna un certo numero di unità intero o rotto; commensurabile o incommensurabile, e la proporzione tra le linee A, B, C, D, diventa una proporzione di numeri.

» Il prodotto delle linee A, e D, che si chiama ancora il loro *rettangolo*, non è dunque altro che il numero delle unità lineari contenute in A, moltiplicato pel numero delle unità lineari contenute in D: e si concepisce facilmente che questo prodotto può, e dev'essere eguale a quello che risulta similmente dalle linee B, e C.

» Le grandezze A e B possono essere d'una specie, e per esempio, linee; e le grandezze C e D di un'altra specie, per esempio, superficie; allora bisogna riguardare sempre queste grandezze come numeri, A e B si esprimeranno in unità lineari, C e D in unità superficiali, ed il prodotto $A \times D$ sarà un numero, come il prodotto $B \times C$.

» Generalmente in tutte le operazioni che si faranno sulle

proporzioni bisogna sempre riguardare i termini di queste proporzioni come altrettanti numeri, ciascuno della specie che gli conviene, e non si durerà alcuna fatica a concepire queste operazioni, e le conseguenze che ne derivano.

» Dobbiamo anche avvertire che parecchie delle nostre dimostrazioni sono fondate sopra alcune delle regole più semplici dell' algebra, le quali sono fondate esse stesse sugli assiomi cogniti: così se si ha $A = B + C$, e si moltiplichi ogni membro per una stessa quantità M, se ne conchiude $A \times M = B \times M + C \times M$. Parimente, se si ha $A = B + C$, e $D = E - C$, e si sommano le quantità eguali, cancellando $+C$ e $-C$ che si distruggono, se ne conchiuderà $A + D = B + E$; e così degli altri casi. Tutto ciò è assai chiaro da per se stesso, ma in caso di difficoltà sarà bene consultare i libri d' algebra, e frammischiare così lo studio delle due scienze ».

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

I parallelogrammi che hanno le basi eguali, e le altezze eguali, sono equivalenti.

Sia AB (Fig. 96.) la base comune de'due parallelogrammi ABCD, ABEF: poichè questi si suppongono avere la medesima altezza, le basi superiori DC, FE, saranno situate sopra una medesima linea retta parallela ad AB. Ora, per la natura de' parallelogrammi, si ha $AD = BC$, ed $AF = BE$; per la medesima ragione si ha $DC = AB$, ed $FE = AB$; dunque $DC = FE$; onde togliendo DC, ed FE dalla medesima linea DE, i resti CE, e DF, saranno eguali. Da ciò segue che i triangoli DAF, CBE, sono equilateri tra di loro, e per conseguenza eguali (*a*).

Ma se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dal medesimo quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD, dunque i due parallelogrammi ABCD, ABEF, che hanno la medesima base e la medesima altezza sono equivalenti.

Corollario. Dunque ogni parallelogrammo ABCD, (Fig. 97.) è equivalente al rettangolo ABEF della medesima base e della medesima altezza.

(a) *Pr.* 11., 1.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Ogni triangolo ABC (Fig. 98.) *è la metà del parallelogrammo* ABCD *che ha la medesima base e la medesima altezza.*

Poichè i triangoli ABC, ACD, sono eguali (*a*).

Corollario I. Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BDEF, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AO; perchè il rettangolo BCEF è equivalente al parallelogrammo ABCD.

Corollario II. Tutti i triangoli che hanno le basi eguali, e le altezze eguali sono equivalenti.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Due rettangoli della medesima altezza stanno tra loro come le rispettive basi.

Siano ABCD, AEFD (Fig. 99.) due rettangoli che hanno per altezza comune AD : dico ch'essi stanno fra loro come le basi AB, AE.

Supponiamo primieramente che le basi AB, AE siano commensurabili tra di loro, e che stiano, per esempio, come i numeri 7 e 4 : se si divide AB in sette parti eguali, AE conterrà 4 di queste parti; si alzi da ogni punto di divisione una perpendicolare alla base; si formeranno così sette rettangoli parziali, che saranno fra loro eguali, perchè avranno la medesima base, e la medesima altezza. Il rettangolo ABCD conterrà sette rettangoli parziali, mentre AEFD ne conterrà quattro, dunque il rettangolo ABCD stà al rettangolo AEFD come 7 a 4, ovvero come AB stà ad AE. Il medesimo ragionamento può essere applicato ad ogni rapporto diverso da quello di 7 a 4; dunque qualunque sia questo rapporto, purchè commensurabile, si avrà

ABCD : AEFD : : AB : AE.

Supponiamo in secondo luogo che le basi AB, AE (Fig. 100.) siano incommensurabili fra di loro; dico che ciò nonostante si avrà

ABCD : AEFD : AB : AE.

---

(1) *Pr.* 28. 1.

Poichè se questa proporzione non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore, o minore di AE. Supponiamo che sia maggiore, e che si abbia

ABCD : AEFD : : AB: AO.

Dividasi la linea AB in parti eguali minori di EO; vi sarà almeno un punto di divisione I situato tra E ed O; da questo punto si alzi sopra AI la perpendicolare IK: le basi AB, AI saranno commensurabili fra di loro; e quindi si avrà, secondo ciò che si è or dimostrato,

ABCD AIKD AB AI.

Ma si ha per supposizione

ABCD : AEFD : : AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono eguali; dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne risulta

AIKD : AEFD : : AI : AO.

Ma AO è maggiore di AI; dunque, affinchè sussistesse la proporzione, bisognerebbe che il rettangolo AEFD fosse maggiore di AIKD; ora al contrario esso è minore; dunque la proporzione è impossibile; dunque ABCD non può stare ed AEFD come AB stà ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può essere minore di AE; dunque esso è eguale ad AE.

Dunque qualunque sia il rapporto delle basi, due rettangoli della medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Due rettangoli qualunque ABCD, AEGF, (Fig. 101.) *stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per le altezze; in modo che si ha*

ABCD : AEGF : : AB$\times$AD : AE$\times$AF.

Avendo disposto i due rettangoli in maniera che gli angoli in A sieno opposti al vertice, si prolunghino i lati GE, CD finchè s'incontrino in H: i due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; essi stanno dunque tra loro come le loro basi AB, AE: similmente i due rettangoli AEHD, AEGF hanno la medesima altezza AE, essi stanno dunque fra loro come le loro basi AD, AF; quindi si avranno le due proporzioni

ABCD : AEHD : : AB : AE
AEHD : AEGF : : AD : AF.

Moltiplicando in corrispondenza queste due proporzioni, ed osservando che il termine AEHD può essere omesso, come moltiplicatore comune all' antecedente ed al conseguente, si avrà

ABCD : AEGF : : AB×AD : AE×AF.

Scolio. Dunque si può prendere per misura di un rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, purchè si intenda per questo prodotto quello di due numeri, che sono il numero delle unità lineari contenute nella base, ed il numero delle unità lineari contenute nell' altezza.

Questa misura d' altronde non è assoluta, ma soltanto relativa, essa suppone che si valuti similmente un altro rettangolo misurando i suoi lati colla stessa unità lineare; si ottiene così un secondo prodotto, ed il rapporto dè' due prodotti è eguale a quello de' rettangoli, conformemente alla proposizione or dimostrata.

Per esempio, se la base del rettangolo A è di tre unità e la sua altezza di dieci, il rettangolo sarà rappresentato dal numero 3 × 10, ossia 30, numero che così isolato non significa nulla; ma se si ha un secondo rettangolo B, la cui base sia di dodici unità, e l'altezza di sette, questo secondo rettangolo sarà rappresentato dal numero 7 × 12, cioè 84: dal che si conchiuderà che i due rettangoli A e B, stanno fra loro come 30 stà a 84; dunque se si convenisse di prendere il rettangolo A per unità di misura delle superficie, il rettangolo B avrebbe allora per misura assoluta $^{84}/_{30}$, cioè sarebbe eguale a $^{84}/_{30}$ di unità superficiali.

È più comune e più semplice di prendere il quadrato per l' unità di superficie, e si sceglie il quadrato, il cui lato sia l' unità di lunghezza: allora la misura che abbiam riguardata semplicemente come relativa, diventa assoluta: per esempio, il numero 30, col quale abbiamo misurato il rettangolo A, rappresenta 30 unità superficiali, ovvero 30 di quei quadrati, il cui lato è eguale all' unità. Ciò è reso sensibile dalla figura 102.

Si confonde assai spesso in geometria il prodotto di due linee col loro *rettangolo*, e questa espressione è anche passata nell' aritmetica per denotare il prodotto di due numeri disuguali, come s' impiega quella del quadrato per esprimere il prodotto di un numero moltiplicato per sè medesimo.

I quadrati de' numeri 1, 2, 3, ec. sono 1, 4, 9, ec.

Quindi si vede che il quadrato fatto sopra una linea doppia è quadruplo (Fig. 103.) sopra una linea tripla è nove volte più grande, e così di seguito.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

L'aia di un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè il parallelogrammo ABCD (Fig. 97.) è equivalente al rettangolo ABEF, che ha la medesima base AB e la medesima altezza BE (*a*); ora quest' ultimo ha per misura $AB \times BE$ (*b*); dunque $AB \times BE$ è eguale all'aia del parallelogrammo ABCD.

Corollario. I parallelogrammi della medesima base stanno fra loro come le rispettive altezze, ed i parallelogrammi della medesima altezza stanno fra loro come le basi; poichè A, B, C essendo tre grandezze qualunque, si ha generalmente $A \times C : B \times C :: A : B$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

L'aia d'un triangolo è eguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

Poichè il triangolo ABC (Fig. 104.) è la metà del parallelogrammo ABCE, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AD (*c*); ora la superficie del parallelogrammo $= BC \times AD$ (*d*); dunque quella del triangolo $= \frac{1}{2} BC \times AD$, o $BC \times \frac{1}{2} AD$.

Corollario. Due triangoli della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e due triangoli della medesima base stanno fra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

L'aia del trapezio ABCD (Fig. 105.) *è eguale alla sua altezza* EF, *moltiplicata per la semi-somma delle basi parallele* AB, CD.

(a) *Pr.* 1. — (b) *Pr.* 4. — (c) *Pr.* 2 — (d) *Pr.* 5.

Pel punto I, medio del lato CB, conducasi KL parallela al lato opposto AD, e si prolunghi DC finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK, si ha il lato IB=IC, per costruzione, l'angolo LIB=CIK, e l'angolo IBL=ICK poichè CK, e BL son parallele (*a*); quindi questi triangoli sono eguali (*b*), dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL, ed ha per misura EF×AL.

Ma si ha AL=DK; e poichè il triangolo IBL è eguale, al triangolo KCI, sarà il lato BL=CK: dunque AB+CD=AL+DK=2AL, e perciò AL è la semi-somma delle basi AB CD; dunque l'aia del trapezio ABCD è eguale all'altezza EF moltiplicata per la semi-somma delle basi AB, CD, il che si esprime così: $ABCD = EF\times\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$.

Scolio. Se pel punto I, medio di BC, si meni IH parallela alla base AB, sarà pure il punto H medio di AD, in fatti la figura AHIL è un parallelogrammo, al pari di DHIK, poichè i lati opposti son paralleli; si ha dunque AH=IL, e DH=IK: ora IL=IK, perchè i triangoli BIL, CIK, sono eguali, dunque AH=DH.

Si può osservare che la linea $HI = AL = \frac{AB+CD}{2}$; dunque l'aia del trapezio può esprimersi così EF×HI: essa dunque è eguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea che unisce i punti medî dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se una linea AC (Fig. 106.) *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sull'intera linea* AC *conterrà il quadrato fatto sopra una parte* AB, *più il quadrato fatto sopra l'altra parte* BC, *più due volte il rettangolo compreso sotto le due parti* AB, BC, *il che si esprime così*:

$\overline{AC}^2$, *o* $(AB+BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB\times BC$.

Ci costruisca il quadrato ACDE; prendasi AF=AB, si conduca FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Il quadrato ACDE è diviso in quattro parti: la prima

(a) *Pr.* 24, 1. — (b) *Pr.* 7, 1.

ABIF è il quadrato fatto sopra AB, piochè si è preso AF= AB: la seconda IGDH è il quadrato fatto sopra BC, poichè, si ha AC=AE, e AB=AF, la differenza AC—AB è eguale alla differenza AE—AF, lo che dà BC=EF, ma, a cagione delle parallele, IG=BC, e DG=EF; dunque HIGD è uguale al quadrato fatto sopra BC. Essendo tolte queste due parti dal quadrato totale, restano i due rettangoli BCGI, EFHI, che hanno ciascuna per misura AB×BC; dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

Scolio. Questa proposizione si accorda con quella che si dimostra in algebra per la formazione del quadrato d'un binomio ch' è così espressa:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se la linea AC (Fig. 107.) *è la differenza di due linee rette* AB, BC, *il quadrato fatto sopra* AC *conterrà il quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *meno due volte il rettangolo fatto sopra* AB, *e* BC; *cioè a dire che si avrà*

$$\overline{AB}^2 \text{ ovvero } (AB-BC)^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BA\times BC.$$

Si costruisca il quadrato ABIF: prendasi AE=AC; si conduca CG parallela a BI, HK parallela ad AB, e si termini il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD, hanno ciascuno per misura AB×BC: se si tolgano entrambi dalla figura intera ABILKEA, che ha per valore $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque, ec.

Scolio. Questa proposizione combina colla formola dell' algebra $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Il rettangolo fatto sulla somma e la differenza di due rette, è eguale alla differenza dei quadrati di queste rette: così si ha

$$(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2.$$

Si costruiscano sopra AB, ed AC i quadrati ABIF, ed ACDE;

(Fig. 108.) prolungasi AB d' una quantità BK=BC, e si termini il rettangolo AKLE.

La base AK del rettangolo è la somma delle due rette AB, BC; la sua altezza AE è la differenza di queste medesime linee. Dunque il rettangolo AKLE=(AB+BC)×(AB—BC). Ma questo medesimo rettangolo è composto dalle due parti ABHE+BHLK, e la parte BHLK è eguale al rettangolo EDGF, poichè BH=DE, e BK=EF; dunque AKLE=ABHE+EDGF. Or queste due parti formano il quadrato ABIF, meno il quadrato DHIG, ch'è il quadrato fatto sopra BC: dunque finalmente $(AB+BC)\times(AB-BC)=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$.

Scolio. Questa proposizione corrisponde alla formola dell' algebra $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Il quadrato fatto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati.

Sia ABC un triangolo rettangolo in A; (Fig. 109.) si formino i quadrati sopra i tre lati; si abbassi dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa la perpendicolare AD, che si prolungherà fino in E; si tirino in seguito le diagonali AF, CH.

L' angolo ABF è composto dell'angolo ABC più l'angolo retto CBF: l' angolo CBH è composto del medesimo angolo ABC più l' angolo retto ABH, dunque l' angolo ABF=HBC. Ma AB=BH, come lati d'un medesimo quadrato, e BF=BC per la medesima ragione; dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo eguale compreso tra i lati eguali, dunque essi sono eguali tra loro *(a)*.

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF (o per più brevità BE), che ha la medesima base BF, e la medesima altezza BD *(b)*. Il triangolo HBC è parimente la metà del quadrato AH, perchè essendo retto l'angolo BAC, come pure BAL, AC, ed AL non fanno che una sola linea retta parallela ad HB; dunque il triangolo HBC, ed il quadrato AH, che hanno la base comune BH, hanno pure l' altezza comune AB, dunque il triangolo è la metà del quadrato.

Si è di già dimostrato che il triangolo ABF è eguale al

(a) *Pr.* 6. 1. — (b) *Pr.* 2.

triangolo HBC; dunque il rettangolo BDEF, doppio del triangolo ABF, è equivalente al quadrato AH; doppio del triangolo HBC. Si dimostrerà parimente che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG presi insieme fanno il quadrato BCGF; dunque il quadrato BCGF, fatto sull'ipotenusa, è eguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK fatti sugli altri due lati, o in altri termini, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Corollario I. Dunque il quadrato di uno de' lati dell'angolo retto è eguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro lato; il che si esprime così $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$.

Coroll. II. Sia ABCD (Fig. 118.) un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC essendo rettangolo ed isoscele, si avrà $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$; dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadrato fatto sul lato* AB.

Si può rendere sensibile questa proprietà conducendo pei punti A e C le parallele a BD, e per i punti B e D le parallele ad AC; si formerà così un nuovo quadrato EFGH, che sarà il quadrato di AC. Or si vede che EFGH contiene otto triangoli eguali ad AEB, e che ABCD ne contiene quattro; dunque il quadrato EFGH è doppio di ABCD.

Poichè $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: 2 : 1$, si ha, estraendone la radice quadrata, $BC : AB :: \sqrt{2} : 1$: dunque *la diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.*

Questo è ciò che si svilupperà maggiormente in un'altra occasione.

Coroll. III. Si è dimostrato che il quadrato AH (Fig. 109.) è equivalente al rettangolo BDEF; ora, a cagione dell'altezza comune BF, il quadrato BCGF stà al rettangolo BDEF come la base BC stà alla base BD; dunque:

$$\overline{BC}^2 : \overline{BB}^2 :: BC : BD.$$

Dunque *il quadrato dell'ipotenusa stà al quadrato d'uno de' lati dell'angolo retto, come l'ipotenusa stà al segmento adiacente a questo lato.* Si chiama quì *segmento* la parte dell'ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto, così BD è il segmento adiacente al lato AB, e DC è il segmento adicente al lato AC. Si avrebbe similmente

$$\overline{BC}^2 : \overline{AC}^2 :: BC : CD.$$

Coroll. IV. I rettangoli BDEF, DCGE, avendo pure la medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi BD, CD. Or questi rettangoli sono equivalenti a' quadrati $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$: dunque

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC.$$

Dunque *i quadrati dei due lati dell' angolo retto stanno fra loro come i seguenti dell' ipotenusa adiacenti a questi lati.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

In un triangolo ABC, (Fig. 110.) *se l' angolo* C *è acuto il quadrato del lato opposto sarà minore della somma de' quadrati de' lati che comprendono l' angolo* C; *e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà eguale al doppio del rettangolo* $BC \times CD$; *in modo che si avrà*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD.$$

Vi sono due casi. 1.° Se la perpendicolare cade dentro del triangolo ABC, si avrà $BD = BC - CD$, e per conseguenza (*a*) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC \times CD$. Aggiungendo ad ambe le parti $\overline{AD}^2$, ed osservando che i triangoli rettangoli ABD, ADC danno $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$, e $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD$.

2.° Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC. si avrà $BD = CD - BC$, e per conseguenza (*b*) $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2CD \times BC$. Aggiungendo ad ambe le parti $\overline{AD}^2$, se ne conchiuderà similmente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC \times CD.$$

(a) *Pr.* 9. — (b) *Pr.* 9

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

In un triangolo ABC, (Fig. **111.**) *se l'angolo* C *è ottuso, il quadrato del lato opposto* AB *sarà maggiore della somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo* C; *e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà eguale al doppio del rettangolo* BC×CD; *talmente che si avrà*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CD.$$

La perpendicolare non può cadere dentro del triangolo, poichè se cadesse, per esempio, in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E è l'angolo ottuso C, il che è impossibile (*a*): essa dunque cade al di fuori, e si ha

BD = BC + CD. Da ciò risulta (*b*) $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CD$.

Aggiungendo ad ambe le parti $\overline{AD}^2$, e facendo le riduzioni come nel teorema precedente, se ne conchiuderà $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.

Scolio. Il triangolo rettangolo è il solo, in cui la somma dei quadrati di due lati sia eguale al quadrato del terzo, poichè, se l'angolo compreso da questi lati è acuto, la somma dei loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto, se è ottuso, sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

In un triangolo qualunque ABC, (Fig. **112.**) *se si tiri dal vertice al punto medio della base la linea retta* AE, *dico che si avrà* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$.

Si abbassi la perpendicolare AD sulla base BC; il triangolo AEC darà pel teorema XII.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 - 2EC \times ED.$$

(a) *Pr.* **19**, **1.** — (b) *Pr.* **8.**

Il triangolo ABE darà pel teorema XIII.

$$\overline{AB}=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2+2EB\times ED.$$

Dunque, addizionando ed osservando che EB$=$EC, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EB}^2.$$

Corollario. Dunque, *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati de'lati è eguale alla somma de'quadrati delle due diagonali.*

Poichè le diagonali AC, BD (Fig. 113.) si tagliano scambievolmente in due parti eguali nel punto E (*a*); perciò il triangolo ABC dà

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{BE}^2.$$

Il triangolo ADC da parimente

$$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Sommando membro con membro, ed osservando che BE$=$DE, si avrà

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2.$$

Ma $4\overline{AE}^2$ è il quadrato di 2AE, o di AC, $4\overline{DE}^2$ è il quadrato di BD, dunque la somma dei quadrati de'lati è eguale alla somma de' quadrati delle diagonali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

La linea DE, *tirata parallelamente alla base d'un triangolo* ABC, (Fig. 114.) *divide i lati* AB, AC, *proporzionalmente; talmente che si ha* AD : DB : : AE : EC.

Si congiungano BE, e DC; i due triangoli BDE, DEC, hanno la medesima base DE, hanno pure la medesima altezza, poichè i vertici B, e C sono situati sopra una parallela alla base, dunque questi triangoli sono equivalenti (*b*).

I triangoli ADE, BDE, di cui il vertice comune è E, hanno la medesima altezza, e stanno perciò fra loro come le basi AD, BD (*c*), onde si ha

ADE : BDE : : AD : DB.

I triangoli ADE, DEC, di cui il vertice comune è D,

(a) *Pr.* 31, 1. — (b) *Pr.* 2. — (c) *Pr.* 6.

hanno pure la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AE, EC, dunque

ADE : DEC : : AE : EC.

Ma il triangolo BDE=DEC; dunque a causa del rapporto comune in queste proporzioni, se ne conchiuderà

AD : DB : : AE : EC.

Corollario I. Da ciò risulta *componendo* AD+DB : AD : : AE+EC : AE, ossia AB : AD : : AC : AE, e così pure AB : BD : : AC : CE.

Corol. II. Se tra due rette AB, CD, (Fig. 115.) *si tirino quante parallele si vogliono* AC, EF, GH, BD, *ec. queste rette saranno tagliate proporzionalmente, e si avrà* AE : CF : : EG : FH : : GB : HD.

Perchè, sia O il punto di concorso delle rette AB, CD; nel triangolo OEF, in cui la linea AC è tirata parallelamente alla base EF, si avrà OE : AE : : OF : CF, oppure OE : OF : : AE : CF. Nel triangolo OGH, si avrà similmente OE : EG : : OF : FH, ovvero OE : OF : : EG : FH; dunque, a cagione del rapporto comune : OE : OF, queste due proporzioni danno AE : CF : : EG : FH. Si dimostrerà nello stesso modo che EG : FH : : GB : HD, e così di seguito; dunque le rette AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle parallele EF, GH, ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

Reciprocamente se i lati AB, AC, (Fig. 116) *sono tagliati proporzionalmente della retta* DE, *talmente che si abbia* AD : BD : : AE : EC, *dico che la linea* DE *sarà parallela alla base* BC.

Poichè se DE non è parallela a BC, supponiamo che lo sia DO; allora, secondo il teorema precedente, si avrà AD : BD : : AO : OC. Ma, per ipotesi, AD : DB : : AE : EC; dunque si avrebbe AO : OC : : AE : EC; proporzione impossibile, poichè da una parte l'antecedente AE è maggiore di AO, e dall'altra il conseguente EC è minore di OC : dunque la parallela BC tirata pel punto D non può differire da DE; dunque DE è questa parallela.

Scolio. La medesima conclusione avrebbe luogo se si supponesse la proporzione AB : AD : : AC : AE, poichè questa proporzione darebbe AB—AD : AD : : AC—AD : AE, ovvero BD : AD : : CE : AE.

onde si ha BC : CE : : BA : AF (a). In vece di AF mettendo la sua eguale CE, si avrà,

BC : CE : : BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, se si riguardi BF come la base, CD è una parallela a questa base, e si ha la proporzione BC : CE : : FD : DE. In vece di FD mettendo la sua eguale AC, si avrà,

BC : CE : : AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni che contengono il medesimo rapporto BC : CE, si può concludere ancora,

AC : DE : : BA : CD.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE, hanno i lati omologhi proporzionali; ma secondo la definizione II, due figure sono simili quando hanno ad un tempo stesso gli angoli rispettivamente eguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE, sono due figure simili.

Corollario. Affinchè due triangoli siano simili, basta che abbiano due angoli rispettivamente eguali; perchè allora il terzo sarà eguale in ambedue i triangoli, e i due triangoli saranno equiangoli.

Scolio. Osservate che, ne' triangoli simili, i lati omologhi sono opposti agli angoli eguali; così essendo l'angolo ACB eguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; del pari AC e DE sono omologhi, perchè sono opposti agli angoli eguali ABC, DCE: essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni:

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali, sono equiangoli e simili.

Supponiamo che si abbia BC : EF : : AB : DE : : AC : DF; (Fig. 120.) dico che i triangoli ABC, DEF, avranno gli angoli eguali, cioè, A=D, B=E, C=F.

Si faccia al punto E l'angolo FEG=B ed al punto F l'angolo EFG=C, il terzo G sarà eguale al terzo A, e i due triangoli ABC, EFG, saranno equiangoli; dunque si avrà pel teorema precedente BC : EF : : AB : EG, ma per supposi,

(a) *Pr.* 15.

zione, BC : EF : : AB : DE, dunque EG=ED. Si avrà ancora pel medesimo teorema BC : EF : : AC : FG; ora si ha per supposizione, BC : EF : : AC : DF, dunque FG=DF; dunque i triangoli EGF, DEF hanno i tre lati rispettivamente eguali; dunque essi sono eguali (*a*). Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC, sono equiangoli e simili.

Scolio I. Si vede da queste due ultime proposizioni che nei triangoli, l'eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente, in modo che una di queste condizioni serve per assicurar la similitudine dei triangoli. Non è lo stesso nelle figure di più di tre lati; perchè, trattandosi de' soli quadrilateri, si può senza cambiar gli angoli, alterare la proporzione dei lati, o senza alterare i lati cangiare gli angoli; così la proporzionalità dei lati non può esser una conseguenza dell'eguaglianza degli angoli; nè *viceversa*. Si vede per esempio, che conducendo EF parallela a BC (Fig. 121.), gli angoli del quadrilatero AEFD sono eguali a quelli del quadrilatero ABCD; ma la proporzione de' lati è differente: del pari, senza cangiar di lunghezza i quattro lati AB, BC, CD, AD, si può avvicinare, o allontanare il punto B dal punto D, il che altererà gli angoli.

Scolio II. Le due proposizioni precedenti che propriamente non ne fanno che una sola, unite a quella del quadrato dell'ipotenusa, sono le proposizioni le più importanti e le più feconde della geometria; bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni ed alla risoluzione di tutti i problemi: la ragione si è che tutte le figure possono dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le figure.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, sono simili.

Sia l'angolo A=D, (Fig. 122.) e supponiamo che si abbia AB : DE : : AC : DF, dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

(a) *Pr.* 11, 1.

Si prenda AG=DE, e si tiri GH parallela a BC, l'angolo AGH sarà eguale all'angolo ABC (a); ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC; si avrà dunque AB : AG : : AC : AH. Ma, per supposizione, AB : DE : : AC : DF, e per costruzione AG=DE; dunque AH=DF. I due triangoli AGH, DEF, hanno dunque un angolo eguale compreso fra lati eguali; essi dunque sono eguali. Ora il triangolo AGH è simile ad ABC, dunque DEF è pure simile ad ABC.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Due triangoli che hanno i lati omologhi paralleli, o che gli hanno rispettivamente perpendicolari, sono simili.

Poichè, 1.° se il lato AB (Fig. 123.) è parallelo a DE e BC ad EF, l'angolo ABC sarà eguale a DEF (b); se di più AC è parallela a DF, l'angolo ACB sarà eguale a DFE, ed anche BAC ad EDF: dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, dunque essi sono anche simili.

2.° Sia il lato DE (Fig. 124.) perpendicolare ad AB, e il lato DF ad AC. Nel quadrilatero AIDH i due angoli I, ed H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti (c); dunque i due rimanenti IAH, IDH equivalgono a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti: dunque l'angolo EDF è eguale a ad IAH, o BAC: parimente se il terzo lato EF è perpendicolare al terzo BC, si dimostrerà che l'angolo DFE=C e DEF=B; dunque i due triangoli ABC, DEF, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili.

Scolio. Nel caso dei lati paralleli i lati omologhi sono i lati paralleli; ed in quello de' lati perpendicolari, lo sono i lati perpendicolari. Così, in quest'ultimo caso, DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa de' due triangoli, differente da quella che è supposta nella fig. 124; ma l'eguaglianza degli angoli rispettivi si dimostrerebbe sempre, o col mezzo dei quadrilateri, come AIDH, di cui due angoli sono retti, o col paragone di due triangoli che, con degli angoli opposti al vertice, avrebbero ciascuno un angolo retto: d'altronde, si potrebbe sempre sup-

---

(a) *Pr.* 24, 1. — (b) *Pr.* 27, 1. — (c) *Pr.* 20, 1.

porre che si fosse costrutto dentro del triangolo ABC un triangolo DEF, i cui lati fossero paralleli a quelli del triangolo paragonato ad ABC, ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della figura 124.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Le rette AF, AG, *ec.* (Fig. 125.), *tirate comunque dal vertice di un triangolo dividono proporzionalmente la base* BC, *e la sua parallela* DE; *talmente che si ha*

DI : BF : : IK : FG : : KL : GH, *ec.*

Poichè, siccome DI è parallela a BF, il triangolo ADI è eqiuiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF : : AI : AF. Similmente essendo IK parallela ad FG, si ha AI : AF : : IK : FG; dunque a cagione del rapporto comune AI : AF, si avrà DI : BF : : IK : FG. Si proverà similmente IK : FG : : KL : GH, ec. Dunque la linea DE è divisa nei punti I, K, L, come lo è la base BC ne' punti F, G, H.

Corollario. Dunque, se BC fosse divisa in parti eguali ne' punti F, G, H, la parallela DE sarebbe divisa anche in parti eguali ne' punti I, K, L.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se dal vertice dell'angolo retto A (Fig. 126.) *di un triangolo rettangolo si abbassi la perpendicolare* AC *sull'ipotenusa:*

1.° *I due triangoli parziali* ABD, ADC, *saranno simili fra di loro, ed al triangolo totale* ABC;

2.° *Ogni lato* AB *o* AC *sarà medio proporzionale tra l'ipotenusa* BC *ed il segmento adiacente* BD *o* DC.

3.° *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale tra i due segmenti* BD, DC.

In fatti 1.° il triangolo BAD ed il triangolo BAC hanno l'angolo comune B; di più l'angolo retto BDA è eguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è eguale al terzo C dell'altro; dunque questi due triangoli sono equiangoli, e perciò simili. Si dimostrerà parimente che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque i tre triangoli sono equiangoli e simili fra di loro.

2.° Poichè il triangolo BAD è simile al triango BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD del piccolo triangolo è omologo a BA del grande, perchè sono opposti ad angoli eguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del piccolo è omologa all'ipotenusa BC del grande; dunque si può stabilire la proporzione BD : BA : : BA : BC. Si avrebbe nella stessa maniera DC : AC : : AC : BC. Dunque 2.° ciascuno dei lati AB, AC è medio proporzionale tra l'ipotenusa ed il segmento adiacente a questo lato.

3.° Finalmente, la similitudine dei triangoli ABD, ADC dà, paragonando i lati omologhi, BD : AD : : AD : DC; dunque 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC dell'ipotenusa.

Scolio. La proporzione BD : AB : : AB : DC dà, eguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medî, $\overline{AB}^2=BD \times BC$; si ha similmente $\overline{AC}^2=DC\times BC$, dunque $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BD\times BC+DC\times BC$; il secondo membro è la medesima cosa che $(BD+DC)\times BC$, e si riduce a $BC\times BC$, ossia $\overline{BC}^2$; dunque si ha $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$; dunque il quadrato fatto sopra l'ipotenusa BC è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati AB, AC. Ritorniamo così alla proposizione del quadrato dell'ipotenusa per una strada differentissima da quella che avevano seguita; d'onde si vede che a parlar propriamente, la proposizione del quadrato dell'ipotenusa è una conseguenza della proporzionalità dei lati ne' triangoli equiangoli. Così le proporzioni fondamentali della geometria si riducono, per così dire, a questa sola, cioè, che i triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come ne abbiamo veduto ora un esempio, che tirando delle conseguenze da una o più proposizioni, si ricade su delle proposizioni già dimostrate. In generale, ciò che caratterizza particolarmente i teoremi di geometria, e ciò ch'è una pruova invincibile della loro certezza, si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè si ragioni giustamente, si cade sempre sopra risultamenti esatti. Non sarebbe lo stesso se qualche proposizione fosse falsa, o non fosse vera che per approssimazione; accaderebbe spesso che per mezzo della combinazione delle proposizioni fra loro, l'errore si accrescerebbe, e diventerebbe sensibile. Si vedono esempî di ciò in tutte le dimostrazioni,

dove ci serviamo della *riduzione all'assurdo*. Tali dimostrazioni, in cui si ha per oggetto di provare che due quantità sono eguali, consistono a far vedere che, se si ammettesse fra esse la minima disuguaglianza, ne risulterebbe per mezzo della serie dei ragionamenti un'assurdità manifesta e palpabile; dal che è d' uopo conchiudere che quelle quantità sono eguali.

Corollario. Se da un punto A (Fig. 127.) della circonferenza si conducano le due corde AB, AC all' estremità del diametro BC, il triangolo BAC sarà rettangolo in A (*a*); dunque 1.° *la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC, *del diametro*, ovvero, il che torna lo stesso, il quadrato $\overline{AD}^2$ è uguale al rettangolo BD×DC.

2.° *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC, *ed il segmento adiacente* BD, o pure il che torna lo stesso, $\overline{AB}^2$=BD×BC. Si ha similmente $\overline{AC}^2$=CD×BC; dunque $\overline{AB}^2$: $\overline{AC}^2$: : BD : DC; e se si paragona $\overline{AB}^2$ a $\overline{BC}^2$, si avrà $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$: : BD : BC; si avrebbe del pari $\overline{AC}^2$: $\overline{BC}^2$: : DC : BC. Questi rapporti de' quadrati de' lati, sì fra loro, che col quadrato dell' ipotenusa, sono già stati dati nei Corollarî III e IV della proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Due triangoli che hanno un angolo eguale stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l' angolo eguale. Così il triangolo ABC *stà al triangolo* ADE *come il rettangolo* AB×AC *stà al rettangolo* AD×AE (Fig. 128.).

Si tiri BE; i due triangoli ABE, ADE, il cui vertice comune è in E, hanno la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AB, AD (*b*); dunqne

ABE : ADE : : AB : AD.

Si ha parimente

ABC : ABE : : AC : AE.

(a) *Pr.* 18, 2. — (b) *Pr.* 6.

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo il termine comune ABE, si avrà

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollario. Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo $AB \times AC$, fosse eguale al rettangolo $AD \times AE$, o se si avesse $AB : AD :: AE : AC$; lo che avrebbe luogo se la linea DG fosse parallela a BE.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Sia l' angolo A=D, (Fig. 122.) e l'angolo A=B; primieramente, a cagione degli angoli eguali A e D, si avrà per la proposizione precedente

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF.$$

D'altronde abbiamo, a causa della similitudine de' triangoli,

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E se si moltiplica questa proporzione termine a termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne risulterà,

$$AB \times AC : DE \times DF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Donde

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dunque due triangoli simili ABC, DEF, stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF, o come i quadrati di due altri lati omologhi qualunque.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili rispettivamente e similmente disposti.

Nel poligono ABCDE, (Fig. 129.) si conducono dal vertice di uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli. Nell' altro poligono FGHIL si conducano similmente dall' angolo F omologo ad A, le diagonali FH, FI agli altri angoli.

Poichè i poligoni sono simili, l'angolo ABC è eguale al

suo omologo FGH (*a*), e di più i lati AB, BC, sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si ha AB : FG : : BC : GH. Segue da ciò che i triangoli ABC, FGH, hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali; dunque essi sono simili (*b*); dunque l'angolo BCA è eguale a GHF. Questi angoli eguali essendo tolti dagli angoli eguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI, saranno eguali; ma poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha AC : FH : : BC : GH; d'altronde, a cagione della simiglianza dei poligoni (*d*), BC : GH : : CD : HI; dunque AC : FH : : CD : HI; ma si è già veduto che l'angolo ACD=FHI; dunque i triangoli ACD, FHI hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali, dunque essi sono simili. Si può continuare similmente a dimostrare la simiglianza dei triangoli susseguenti, qualunque fosse il numero dei lati dei poligoni proposti; dunque due poligoni simili sono composti da un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti.

Scolio. La proposizione inversa è egualmente vera: *Se due poligoni sono composti dello stesso numero di triangoli simili, e similmente disposti, questi due poligoni saranno simili.*

Poichè la simiglianza de' triangoli rispettivi darà l'angolo ABC=FGH, BCA=GHF=ACD, FHI; dunque BCD=GHI: così pure CDE=HIK, ec. Di più si avrà AB : FG : : BC : GH : : AC : FH : : CD : HI, ec.; dunque i due poligoni hanno gli angoli eguali ed i lati proporzionali; dunque essi sono simili.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

I contorni o perimetri de' poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.

Poichè, 1.° avendosi, per la natura delle figure simili, AB : FG : : BC : GH : : CD : HI, ec. (Fig. 129.), si può conchiudere da questa serie di rapporti eguali: che la somma degli antecedenti, AB+BC+CD, ec. perimetro della prima figura, stà alla somma de' conseguenti FG+GH+HI, ec., perimetro della seconda figura, come un antecedente stà al suo conseguente, ovvero come il lato AB stà al suo omologo FG.

(a) *Def.* 2. — (b) *P.* 20. — (c) *Def.* 2.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha (*a*)

$ABC : FGH :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$; similmente i triangoli simili ACD; FHI, danno $ACD : FHI :: \overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$: dunque a motivo del rapporto comune $\overline{AC}^2 : \overline{FH}^2$ si ha

$$ABC : FGH :: ACD : FHI.$$

Con un simile ragionamento si troverebbe

$$ACD : FHI :: ADE : FIK;$$

e così di seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti eguali si conchiuderà: la somma degli antecedenti ABC+ACB+ADE, ossia il poligono ABCDE, stà alla somma dei conseguenti FGH+FHI+FIK, ossia il poligono FGHIK, come un antecedente ABC stà al suo conseguente FGH, o come $\overline{AB}^2$ stà ad $\overline{FG}^2$; dunque le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati de' lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscono tre figure simili i cui lati omologhi siano eguali ai tre lati d'un triangolo rettangolo, la figura fatta sul lato maggiore sarà eguale alla somma delle altre due: poichè queste tre figure sono proporzionali a' quadrati dei loro lati omologhi; ora il quadrato dell'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, dunque ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA.

Le parti di due corde AB, CD, (Fig. 130.) *che si tagliano dentro d'un cerchio, sono reciprocamente proporzionali, vale a dire che si ha*

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Si tirino AC e BD: nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono eguali come opposti al vertice; l'angolo A è eguale all'angolo D, perchè sono iscritti nel medesimo segmento (*b*); per la medesima ragione l'angolo C=B; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione

$$AO : DO :: CO : OB.$$

Corollario. Si ricava da ciò $AO \times OB = DO \times CO$; dunque

---

(a) *Pr.* 25. — (b) *Pr.* 18, 2.

il rettangolo delle due parti d'una delle corde è eguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

Se da uno stesso punto O, (Fig. 131.) *preso fuori del cerchio, si tirino le secanti* OB, OC *terminate all'arco concavo* BC, *le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne, cioè che si avrà* OB : OC : : OD : OA.

Poichè, tirando AC e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune; di più l'angolo B=C (*a*); dunque questi triangoli sono simili; e i lati omologhi danno la proporzione,

OB : OC : : OD : OA.

Corollario. Dunque il rettangolo OA×OB è eguale al rettangolo OC×OD.

Scolio. Si può osservare che questa proposizione ha molta analogia colla precedente, e che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD, in vece di tagliarsi dentro del cerchio, si tagliano al di fuori. La proposizione seguente può ancora essere riguardata come un caso particolare di quest' ultima.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

Se da uno stesso punto O (Fig. 132.) *presso fuori del cerchio si tiri una tangente* OA *ed una secante* OC, *la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna; talmente che si avrà* OC : OA : : OA : OD; *ovvero il che torna lo stesso*, $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

Poichè, congiungendo AD ed AC, i triangoli OAD, OAC, hanno l'angolo O comune, di più l'angolo OAD, formato da una tangente e da una corda (*b*), ha per misura la metà dell'arco AD, e l'angolo C ha la medesima misura; dunque l'angolo OAD=C; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione

OC : OA : : OA : OD

che dà $\overline{OA}^2 = OC \times OD$.

(a) *Pr.* 18, 2. — (b) *Pr.* 19, 2.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

» *In un triangolo* ABC, (Fig. 133.) *se si divide l'an-*
» *golo* A *in due parti eguali colla retta* AD, *il rettangolo*
» *dei lati* AB, AC *sarà eguale al rettangolo de' segmenti* BD,
» DC, *più il quadrato della secante* AD.

» Si faccia passare una circonferenza per i tre punti A,B,C,
» si prolunghi AD fino alla circonferenza, e si congiunga CE.

» Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè,
» per ipotesi, l'angolo BAD=EAC; di più l'angolo B=E,
» avendo ambedue per misura la metà dell'arco AC, dunque
» questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la
» proporzione BA : AE : : AD : AC. Quindi risulta BA×AC
» =AE×AD; ma AE=AD+DE, e moltiplicando ambe
» le parti per AD, si ha $AE\times AD=\overline{AD}^2+AD\times DE$; d'altron-
» de AD×DE=BD×DC (*a*), dunque finalmente

$$BA\times AC=\overline{AD}^2+BD\times DC.$$

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

» *In un triangolo* ABC, (Fig. 134.) *il rettangolo dei*
» *due lati* AB, AC, *è eguale al rettangolo compreso dal dia-*
» *metro* CE *del cerchio circoscritto*, *e dalla perpendicolare* AD
» *abbassata sul terzo lato* BC.

» Poichè, congiungendo AE, i triangoli ABD, AEC,
» sono rettangoli, l'uno in D, l'altro in A; di più l'angolo
» B=E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la pro-
» porzione AB : CE : : AD : AC; dalla quale risulta AB×
» AC=CE×AD.

» *Corollario.* Se si moltiplicano queste quantità eguali
» per la medesima quantità BC, si avrà AB×AC×BC=CE
» ×AD×BC. Ora AD×BC è il doppio della superficie del
» triangolo (*b*); dunque *il prodotto dei tre lati di un trian-*
» *golo è eguale alla superficie moltiplicata pel doppio del dia-*
» *metro del cerchio circoscritto.*

(*a*) *Pr.* 28. — (*b*) *Pr.* 6.

» Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per
» una ragione che si vedrà in seguito. Il suo valore facil-
» mente si concepisce, immaginando che le linee siano ri-
» dotte in numeri, e moltiplicando i numeri di cui si tratta.

»*Scolio.* Si può dimostrare ancora che *la superficie di*
» *un triangolo è eguale al suo perimetro moltiplicato per la*
» *metà del raggio del cerchio iscritto.*

» Poichè i triangoli AOB, BOC, AOC, (Fig. 87.) che
» hanno il loro vertice comune in O, hanno per altezza co-
» mune il raggio del cerchio iscritto; dunque la somma di
» questi triangoli sarà eguale alla somma delle basi AB, BC,
» AC, moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque la
» superficie del triangolo ABC è eguale al suo perimetro mol-
» tiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

In ogni quadrilatero iscritto ABCD, (Fig. 135.) *il*
» *rettangolo delle due diagonali* AC, BD, *è eguale alla som-*
» *ma dei rettangoli de' lati opposti; talmente che si ha*

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

» Si prenda l'arco CO=AD, e si tiri BO che incontri
» la diagonale AC in I.

» L'angolo ABD=CBI, poichè l'uno ha per misura la
» metà di AD, e l'altro la metà di CO eguale ad AD. L'angolo
» ADB=BCI, perchè sono iscritti nel medesimo segmento AOB;
» dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e si ha la
» proporzione AD : CI : : BD : BC; donde risulta AD×BC=
» CI×BD. Dico ora che il triangolo ABI è simile al triangolo
» BDC, perchè essendo l'arco AD eguale a CO; se si aggiunge
» da ambe le parti OD, si avrà l'arco AO=DC; dunque l'an-
» golo ABI=DBC; di più l'angolo BAI=BDC, perchè sono
» iscritti nel medesimo segmento; dunque i triangoli ABI, DBC
» sono simili; ed i lati omologhi danno la proporzione AB :
» BD : : AI : CD; donde risulta AB×CD=AI×BD.

» Addizionando i due risultamenti trovati, ed osservando
» che AI×BD+CI×BD=(AI+CI)×BD=AC×BD, si avrà

$$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD.$$

» *Scolio.* Si può dimostrare nella stessa maniera un al-
» tro teorema sul quadrilatero iscritto.

» Il triangolo ABD simile a BIC, dà la proporzione BD : BC::

» AB : BI, donde risulta BI × BC=BD × AB. Se si congiunge
» CO, il triangolo ICO, simile ad ABI, sarà simile a BDC,
» e darà la proporzione BD : CO : : DC : OI; donde risulta OI
» × BD=CO × DC, ovvero, a cagione di CO=AD, OI × BD=AD ×
» DC. Aggiungendo i due risultati, e osservando che BI × BD+
» OI × BD si riduce a BO × BD, si avrà,

BO × BD=AB × BC+AD × DC.

» Se si fosse preso BP=AD, e si fosse tirata CKP, si
» sarebbe dimostrato con dei ragionamenti simili che

CP × CA=AB × AD+BC × CD.

» Ma essendo l'arco BP eguale a CO, se si aggiunge BC da
» ambe le parti si avrà l'arco CBP=BCO; dunque la corda CP
» è eguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli BO ×
» BD, e CP × CA stanno fra loro come BD stà a CA; dunque,
» BD : CA : : AB × BC+AD × DC : AD × AB+BC × CD.

» Dunque *le due diagonali di un quadrilatero iscritto*
» *stanno fra loro come le somme de' rettangoli de' lati che*
» *concorrono alle loro estremità.*

» Questi due teoremi possono servire per trovare le dia-
» gonali quando si conoscono i lati.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

» *Sia* P *un punto dato dentro il cerchio sul raggio* AC,
» (Fig. 136.) *e sia preso un punto* Q *al di fuori sul prolunga-*
» *mento dello stesso raggio, talmente che si abbia* CP : CA : :
» CA : CQ, *se da un punto qualunque* M *della circonferenza*
» *si tirino a' due punti* P *e* Q *le rette* MP, MQ, *dico che*
» *queste rette staranno da per tutto nel medesimo rapporto*,
» *e che si avrà sempre* MP : MQ : : AP : AQ.

» Poichè si ha, per supposizione, CP : CA : : CA : CQ,
» mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM : : CM :
» CQ, dunque i triangoli CPM, CQM, hanno un angolo
» eguale C compreso fra lati proporzionali; quindi essi son
» simili (*a*); dunque il terzo lato MP stà al terzo MQ come
» CP stà a CM o CA. Ma la proporzione CP : CA : : CA : CQ dà,
» *dividendo*; CP : CA : : CA—CP : CQ—CA, o CP : CA : :
» AP : AQ, dunque MP : MQ : : AP : AQ.

(a) *Pr*. 20, 3.

PROBLEMI RELATIVI AL LIBRO III.

PROBLEMA. I.

Dividere una linea retta data in quante parti eguali si voglia, ovvero in parti proporzionali ad altre linee date.

1.° Sia proposto di dividere la linea AB (Fig. 137.) in cinque parti eguali; per l'estremità A si condurrà l'indefinita AG, e prendendo AC d'una grandezza qualunque, si porteràAC cinque volte sopra AG. Si uniranno l'ultimo punto di divisione G e l'estremità B colla linea retta GB, poi si condurrà CI parallela a GB; dico che AI sarà la quinta parte di AB, e che per conseguenza portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti eguali.

Poichè, siccome CI è parallela a GB, i lati AG, AB son tagliati proporzionalmente in C, ed I (*a*). Ma AC è la quinta parte di AG, dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto dividere la linea AB (Fig. 138.) in parti proporzionali alle linee rette date P, Q, R. Dall'estremità A si tirerà l'indefinita AG, si prenderanno AC=P, CD=Q, DE=R; si uniranno le estremità E, B, e pei punti C, e D si condurranno CI, DK parallele ad AB; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI, IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R.

Poichè a causa delle parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB sono proporzionali alle parti AC, CD, DE (*b*); e per costruzione, queste ultime sono eguali alle linee date P, Q, R.

PROBLEMA. II.

Trovare una quarta proporzionale a tre rette date A, B, C (Fig. 139.).

Si tirino le due rette indefinite DE, DF, sotto un angolo qualunque. Sopra DE si prendano DA=A, e DB=B, sopra DF prendasi DC=C; si tiri AC, e nel punto B conducasi BX parallela ad AC; dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata; poichè, siccome BX è parallela ad AC, si ha la proporzione DA : DB : : DC : DX; ora, i tre primi termini di questa proporzione sono eguali alle tre linee date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà similmente una terza proporzionale

(a) *Pr.* 15. — (b) *Pr.* 15. .

alle due linee date A, B, poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A, B, C.

PROBLEMA. III.

Trovare una media proporzionale tra due linee date A *e* B.

Sopra una retta indefinita DF (Fig. 140.) si prendano DE=A, ed EF=B: sulla linea totale DF come diametro, descrivasi la mezza circonferenza DGF; dal punto E s'innalzi sul diametro la perpendicolare EG, che incontri la circonferenza in G; dico che EG, sarà la media proporzionale cercata.

In fatti la perpendicolare GE, abbassata da un punto della circonferenza sul diametro, è media proporzionale fra i due segmenti del diametro DE, EF (*a*); or questi segmenti sono eguali alle linee date A e B.

PROBLEMA IV.

Dividere la retta data AB (Fig. 141.) *in due parti, di maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intera e l'altra parte.*

Dall'estremità B della linea AB si alzi la perpendicolare BC eguale alla metà di AB; dal punto C come centro, e col raggio CB descrivasi una circonferenza; si tiri AC, che taglierà la circonferenza in D, e si prenda AF=AD; dico che la linea AB sarà divisa dal punto F nella maniera richiesta, cioè a dire che si avrà AB : AF : : AF : FB.

Poichè essendo AB perpendicolare all'estremità del raggio CB, essa è una tangente, e se si prolunga AC finchè incontri di nuovo la circonferenza in E, si avrà (*b*) AE : AB : : AB, AD, dunque, *dividendo*, AE—AB : AB ; : AB—AD : AD. Ma poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE è eguale ad AB, e per conseguenza AE—AB=AD=AF; si ha pure, a motivo di AF=AD, AB—AD=FB; dunque AF : AB : : FB : AD, ovvero, AF ; dunque *invertendo*, AB : AF : : AF : FB.

Scolio. Questa specie di divisione della retta AE si chiama divisione in *media ed estrema ragione ;* se ne vedranno degli usi. Si può frattanto osservarè che la secante AE è divisa in *media ed estrema ragione* del punto D; poichè a motivo di AB=DE, si ha AE : DE : : DE : AD.

(a) *Pr.* 23. — (b) *Pr.* 30.

PROBLEMA V.

Per un punto A (Fig. 142.) *dentro dell' angolo dato* BCD, *tirare la retta* BD, *in maniera che le parti* AB, AD, *comprese tra il punto* A *ed i due lati dell' angolo*, *siano eguali.*

Pel punto A si conduca AE parallela a CD; si prenda EB=CE, per i punti B ed A si tiri BAD, che sarà la linea cercata.

Poichè essendo AE parallela a CD, si ha BE : EC : : BA : AD : ora BE=EC; dunque BA=AD.

PROBLEMA VI.

Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo; o ad un triangolo dato.

1.° Sia ABCD (Fig. 143.) il parallelogrammo dato, AB la sua base, DE la sua altezza: tra AB e DE si trovi la media proporzionale XY (*a*); dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD. Poichè si ha, per costruzione, AB : XY : : XY : DE; dunque $\overline{XY}^2 = AB \times DE$: ora $AB \times DE$ è la misura del parallelogrammo, ed $\overline{XY}^2$ quella del quadrato, essi dunque sono equivalenti.

2.° Sia ABC (Fig. 144.) il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza, si trovi la media proporzionale fra AC e la metà di AD, e sia XY questa media; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Poichè siccome si ha BC : XY : : XY : $\frac{1}{2}$ AD; ne risulta $\overline{XY}^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$; dunque il quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

PROBLEMA VII.

Fare sulla linea data AD (Fig. 145.) *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo dato* ABFC.

Si determini la quarta proporzionale alle tre linee AD, AB; AC e sia AX questa quarta proporzionale, dico il rettangolo fatto sopra AD ed AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Poichè siccome si ha AD : AB : : AC : AX : ne risulta $AD \times AX = AB \times AC$; dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

(*a*) *Pr.* 3.

PROBLEMA VIII.

Trovare in linee il rapporto del rettangolo delle due linee date A *e* B *al rettangolo delle due linee date* C *e* D (Fig. 148.).

Sia X una quarta proporzionale alle linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A ed X sarà eguale a quello dei due rettangoli A×B, C×D.

Poichè siccome si ha B : C : : D : X, ne risulta C×D=B×X; dunque A×B : C×D : : A×B, B×X : : A : X.

Corollario. Dunque per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee date A e C, si determini la terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia A : C : : C : X : e si avrà A^2 : C^2 : : A : X.

PROBLEMA IX.

Trovare in linee il rapporto del prodotto delle tre linee date A, B, C, (Fig. 149.) *al prodotto delle tre linee date* P, Q, R.

Alle tre linee date P, A, B, si trovi la quarta proporzionale X : alle tre linee date C, Q, R, si trovi similmente la quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti A×B×C, P×Q×B.

Poichè, siccome P : A : : B : X, si ha A×B=P×X; e moltiplicando da ambe le parti per C, A×B×C=C×P×X. Similmente, siccome C : Q : : R : Y, ne risulta Q×R=C×Y; e moltiplicando da ambe le parti per P, si ha P×Q×R=P×C×Y : dunque il prodotto A×B×C stà al prodotto P×Q×R, come C×P×X sta a P×C×Y, o come X sta ad Y.

PROBLEMA X.

Fare un triangolo equivalente ad un poligono dato.

Sia ABCDE il poligono dato (Fig. 146.) Si tiri primieramente la diagonale CE, che toglie dal poligono il triangolo CDE; pel punto D si conduca DF parallela a CE finchè incontri AE prolungata; si tiri CF; ed il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF, che ha un lato di meno.

In fatti i triangoli CDE, CFE, hanno la base comune CE; essi hanno pure la medesima altezza, perchè i loro vertici D, F, sono situati sopra una linea DF parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti. Aggiungendo da ambe le parti la figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE. e dall'altra il poligono ABCF, che saranno equivalenti.

Si può parimente togliere l'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC, e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso procedere si applicherà ad ogni altra figura : poichè diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si cadrà finalmente sul triangolo equivalente.

Scolio. Abbiamo di già veduto che ogni triangolo può essere cangiato in un quadrato equivalente (*a*); così si troverà sempre un quadrato equivalente ad una figura rettilinea data; questo è ciò che si chiama *quadrare* la figura rettilinea, o trovare la *quadratura.*

Il problema della *quadratura del cerchio* consiste nel trovare un quadrato equivalente ad un cerchio di cui sia dato il diametro.

PROBLEMA XI.

Fare un quadrato che sia eguale alla somma o alla differenza di due quadrati dati.

Siano A e B (Fig. 147.) I lati dei quadrati dati.

1.° Se bisogna trovare un quadrato eguale alla somma di questi quadrati, si tirino le due linee rette indefinite ED, EF ad angolo retto; si prenda ED=A ed EG=B; si congiunga DG, e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, essendo il triangolo DEG rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED ed EG.

2.° Se bisogna trovare un quadrato eguale alla differenza dei quadrati dati, formisi parimente l'angolo retto FEH, prendasi GE uguale al minore dei lati A e B; dal punto G, come centro, e con un raggio GH eguale all' altro lato, si descriva un'arco che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le rette A e B.

Poichè il triangolo GEH è rettangolo, l'ipotenusa GH=A, ed il lato GE=B; dunque il quadrato fatto sopra EH, ec.

Scolio. Si può trovare ancora un quadrato eguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè la costruzione che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due ad uno, e così degli altri. Sarebbe lo stesso se alcuno dei quadrati dovesse essere sottratto dalla somma degli altri.

PROBLEMA XIII.

Costruire un quadrato che stia al quadrato dato ABCD, (Fig. 150.) ***come la linea*** M ***sta alla linea*** N.

Sopra la linea indefinita EG si prenda EF=M; ed EG=N; sopra EG, come diametro, si descriva una semi-circonferenza,

e dal punto F si alzi sul diametro la perpendicolare FH. Dal punto H si conducano le corde HG, HE, che si prolungheranno indefinitamente, sulla prima prendesi HK eguale al lato AB del quadrato dato, e pel punto K conducasi KI parallela ad EG; dico ehe HI sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, a cagione delle parallele KI, GE, si ha HI : HK : : HE : HG; dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: \overline{HE}^2 : \overline{HG}^2$: ma, nel triangolo rettangolo EHG (*a*), il quadrato di HE sta al quadrato di HG, come il segmento EF sta al segmento FG, o come M stà ad N, dunque $\overline{HI}^2 : \overline{HK}^2 :: M : N$. Ma HK=AB; dunque il quadrato fatto sopra di HI stà al quadrato fatto sopra AB, come M stà ad N.

PROBLEMA XIII.

Sul lato FG, (Fig. 129.) *omologo* ad AB, *descrivere un poligono simile al poligono dato* ABCDE.

Nel poligono dato si tirino le diagonali AC, AD: al punto F si faccia l'angolo GFH=BAC, ed al punto G l'angolo FGH=ABC; le linee FH, GH si taglieranno in H, ed FGH sarà un triangolo simile ad ABC. Similmente sopra FH, omologo ad AC, si costruisca il triangolo FIH simile ad ADC, e sopra FI, omologo ad AD, si costruisca il triangolo FIK simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono cercato, cioè simile ad ABCDE.

Poichè questi due poligoni son composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti (*b*).

PROBLEMA XIV.

Essendo date due figure simili, costruire una figura simile, che sia eguale alla loro somma, o alla lor differenza.

Siano A e B due lati omologhi delle figure date, si costruisca un quadrato eguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B; sia X il lato di questo quadrato, sarà X nella figura cercata il lato omologo ad A, e B nelle figure date. Si costituirà in seguito questa figura pel precedente problema.

In fatti le figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi, ora il quadrato del lato X è eguale alla somma, o alla differenza dei qudrati fatti sui lati omologhi A e B; dunque la figura fatta sul lato X è cguale alla somma, o alla differenza delle figure simili fatte sui lati A e B.

(a) *Pr.* 23. — (b) *Pr.* 26.

PROBLEMA XV.

Costruire una figura simile ad una figura data, e che stia a questa figura nel rapporto dato di M *ad* N.

Sia A un lato della figura data: X il lato omologo nella figura cercata; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A, come M stà ad N (*a*). Si troverà dunque X pel problema XII; e conoscendo X si terminerà il resto pel problema XIII.

PROBLEMA XVI.

Costruire una figura simile alla figura P, *ed equivalente alla figura* Q. (Fig. 151.)

Si trovi il lato M del quadrato equivalente alla figura P, ed il lato N del quadrato equivalente alla figura Q. Sia quindi X una quarta proporzionale alle tre linee date M, N, AB; sul lato X, omologo ad AB, descrivasi una figura simile alla figura P; dico che essa sarà ancora equivalente alla figura Q.

Poichè, chiamando Y la figura fatta sul lato X, si avrà:

$P : Y : : \overline{AB}^2 : X^2$ ma per costruzione, $AB : X : : M : N$: ovvero $\overline{AB}^2 : X^2 : : M^2 : N^2$; dunque $P : Y : : M^2 : N^2$. Ma si ha pure, per costruzione, $M^2 = P$ ed $N^2 = Q$; dunque $P : Y : : P : Q$; dunque $Y = Q$; e perciò la figura Y, è simile alla figura P, ed equivalente alla fignra Q.

PROBLEMA XVII.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato C, (Fig. 152.) *e che i due lati adiacenti facciano una somma data* AB.

Sopra AB, come diametro, descrivasi una semi-circonferenza; si conduca parallelamente al diametro la retta DE ad una distanza AD uguale al lato del quadrato dato C. Dal punto E, ove la parallela taglia la circonferenza, si abbassi sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF ed FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Poichè la loro somma è uguale ad AB; ed il loro rettangolo $AF \times FB$ è uguale al quadrato di EF (*b*), o al quadrato di AD; dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato dato C.

Scolio. È d'uopo, affinchè il problema sia possibile, che la distanza AD non superi il raggio, vale a dire che il lato del quadrato C non superi la metà della linea AB.

(a) 27 — (b) 23.

PROBLEMA. XVIII.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato C, (Fig. 153.) *ed i cui lati adiacenti abbiano fra di loro la differenza data* AB.

Sulla linea retta data AB, come diametro, descrivasi una circonferenza; all'estremità del diametro si tiri la tangente AD eguale al lato del quadrato C; pel punto D e pel centro O tirisi la secante DF; dico che DE e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo cercato.

Poichè 1.° la differenza di questi lati è uguale al diametro EF ovvero AB; 2.° il rettangolo DE×DF è uguale ad $\overline{AD}^2$ (*a*); dunque questo rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C.

PROBLEMA XIX.

Trovare la comune misura, se ve n'è alcuna, tra la diagonale ed il lato del quadrato. (Fig. 154.)

Sia ABCG un quadrato qualunque, AC la sua diagonale.

Bisogna primieramente portare CB sopra CA quante volte può esservi contenuta (*b*), e perciò sia descritto col centro C: e col raggio CB il semi-cerchio DBE; si vede che CB è contenuta una volta in AC col resto AD, il risultamento della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisogna paragonare con CB o col suo eguale AB.

Si può prendere AF=AD, e portare realmente AF sopra AB; si troverebbe che vi è contenuta due volte con un resto: ma siccome questo resto ed i seguenti vanno diminuendo, e che ben presto ci sfuggirebbero per la picciolezza, questo metodo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto, del quale non si potrebbe nulla conchiudere per decidere se le linee AC, CB hanno o non hanno fra loro una misura comune: ora v'è un mezzo semplicissimo di evitare le linee decrescenti, e di operare soltanto sopra delle linee che restino sempre della medesima grandezza.

In fatti, essendo l'angolo ABC retto, AB è una tangente, ed AE una secante condotta dal medesimo punto; talmente che si ha (*c*) AD : AB : : AB : AE. Così nella seconda operazione, ove si tratta di paragonare AD con AB, si può invece del rapporto di AD ad AB, prendere quello di AB ad AE: ora AB o la sua eguale CD, è contenuta due volte in

(a) *Pr.* 30. — (b) *Pr.* 27, 3. *lib.* — (c) *Pr.* 30.

AE col resto AD; dunque il risultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste in paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB, o la sua uguale CD con AE; e si avrà del pari 2 per quoziente, ed AD per resto.

Si fa manifesto da ciò che l'operazione non avrà mai fine, e che non vi è alcuna comune misura fra la diagonale ed il lato del quadrato; verità ch'era stata conosciuta per mezzo dell'aritmetica (giacchè queste due linee stanno fra loro come: $\sqrt{2} : 1$) (*a*), ma che acquista un maggior grado di chiarezza mediante la risoluzione geometrica.

Scolio. Non è dunque possibile trovare in numeri il rapporte esatto della diagonale al lato del quadrato; ma possiamo approssimarvici tanto quando si vorrà col mezzo della frazione continua che è eguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda e tutte le altre all'infinito danno 2, onde la frazione, di cui si tratta è

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ec. all' infinito.}}}}}}$$

Per esempio, se si calcoli questa frazione fino al quarto termine inclusivemente, si trova che il suo valore è $1\frac{12}{29}$ o $\frac{41}{29}$; talmente che il rapporto prossimo della diagonale al lato de quadrato è : : 41 : 29. Si troverebbe un raporto più approssimativo calcolando un maggior numero di termini.

LIBRO IV.

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CERCHIO.

DEFINIZIONE.

Un poligono che è nel tempo stesso equiangolo ed equilatero, si chiama *poligono regolare*.

Vi sono de' poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è quello di tre lati; ed il quadrato quello di quattro.

(a) *Pr.* 11.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Due poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono due figure simili.

Siano per esempio i due esagoni regolari ABCDEF, (Fig. 155.) *abcdef*; la somma degli angoli è la stessa nell' una, e nell' altra figura; essa è uguale ad otto retti (*a*), L' angolo A è la sesta parte di questa somma, egualmente che l' angolo *a*; dunque i due angoli A ed *a* sono eguali; ed è lo stesso per conseguenza degli angoli B, e *b*, degli angoli C e *c* ec.

Di più, poichè per natura di questi poligoni i lati AB, DC, CD, ec. sono eguali, come pure *ab*, *bc*, *cd*, ec. è chiaro che si hanno le proporzioni AB : *ab* : : BC : *bc* : : CD : *cd*, ec. dunque queste figure, hanno gli angoli eguali ed i lati omologhi proporzionali; esse dunque sono simili (*b*).

Corollario. I perimetri di due poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhl, e le loro superficie stanno come i quadrati di questi medesimi lati (*c*).

Scolio. L' angolo d' un poligone regolare sl determina per mezzo del numero dei suoi lati, come quello di un poligono equiangolo (*d*).

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Ad ogni poligono regolare si può sempre iscrivere e circoscrivere un cerchio.

Sia ABCDE, ec. (Fig. 156.) il poligono di cui si tratta, si supponga che per i tre punti A, B, C, si faccia passare una circonferenza; sia O il suo centro, ed OP la perpendicolare abbassata sulla metà del lato BC; si tirino AO ed OD.

Il quadrilatero OPCD, ed il quadrilatero OPBA posson essere soprapposti; infatti il lato OP è comune, l' angolo OPC =OPB, poichè sono retti, dunque il lato PC si applicherà sul suo eguale PB, ed il punto C cadrà in B. Di più, per la natura del poligono, l' angolo PCD=PBA; dunque CD prenderà la direzione BA, e poichè CD=BA, il punto D cadrà in A, e i due quadrilateri coincideranno interamente l'uno coll' altro. La distanza OD è dunque uguale ad AO, e per

(a) 28. 1.—(b) *Def.* 2. *lib.* 3.—(c) 27, 3.—(d) 20, 1.

conseguenza la circonferenza che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche pel punto D: ma con un ragionamento simile, si dimostrerà che la circonferenza che passa per tre vertici B, C, D, passerà ancora pel vertice seguente E, e così di seguito; dunque la medesima circonferenza che passa per i punti A, B, C, passa per tutti i vertici degli angoli del poligono, ed il poligono resterà iscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD, ec., sono corde eguali, esse sono dunque egualmente distinti dal centro (*a*); dunque se dal punto O, come centro, e col raggio OP, si descriva una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC e tutti gli altri lati del poligono, ciascuno nel loro punto di mezzo, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza.

Scolio I. Il punto O, centro comune del cerchio iscritto e del cerchio circosrritto può essere riguardato pure come il centro del poligono, e per questa ragione si chiama *angolo al centro*, l'angolo AOB formato dai due raggi tirati alle estremità d' un medesimo lato AB.

Poichè tutte le corde AB, BC, ec., sono eguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro sono eguali, e che perciò il il valor di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.

Scolio II. Per iscrivere un poligono regolare di un certo numero di lati in una circonferenza data, si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti uguali quanti lati deve avere il poligono; poichè essendo uguali gli archi, le corde AB, BC, CD, ec. (Fig. 158.) saranno eguali; i triangoli AOB, BOD, COD, ec., saranno pure eguali; perchè sono equilateri fra di loro; dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE, saranno pure eguali; dunque la figura ABCDE, ec., sarà un poligono regolare.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA

Iscrivere un quadrato in una circonferenza data.

Si tirino due diametri AC, BD, (Fig. 157.) che si taglino ad angoli retti; si congiungano le estremità A, B, C, D: e la figura ABCD sarà il quadrato iscritto: poichè gli angoli AOB, BOC, ec., essendo eguali le corde AB, AC, ec. sono uguali.

(a) 8, 2.

Scolio. Essendo il triangolo BOC rettangolo ed isoscele, si ha (*a*) BC : BO : : $\sqrt{2}$: 1; dunque *il lato del quadrato iscritto stà al raggio, come la radice quadrata di 2 stà all' unità.*

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA

Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in una circonferenza data.

Supponiamo risoluto il problema, e sia AB (Fig. 158.) un lato dell' esagono iscritto, si conducano i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero.

Poichè l' angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti; perciò, prendendo l'angolo retto per unità, si avrà AOB$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo valgono insieme $2-\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{4}{3}$; e siccome sono uguali, sarà ciascuno di essi$=\frac{2}{3}$; dunque il triangolo ABO è equilatero; dunque il lato dell' esagono iscritto è uguale al raggio.

Quindi risulta che per iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data, fa di mestieri portare il raggio sei volte sulla circonferenza, con che si ritornerà sul punto stesso dal quale si era partito.

Essendo iscritto l' esagono ABCDEF; se si uniscano i vertici degli angoli alternativamente con linee rette, si formerà il triangolo equilatero ACE.

Scolio. La figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche una losanga, poichè AB=BC=CO=AO; dunque (*b*) la somma dei quadrati delle diagonali $\overline{AC}^2+\overline{BO}^2$, è uguale alla somma de' quadrati de' lati, la quale è $4\overline{AB}^2$ o $4\overline{BO}^2$; togliendo da ambe le parti $\overline{BO}^2$, resterà $\overline{AC}^2=3\overline{BO}^2$, dunque $\overline{AC}^2$: $\overline{BO}^2$: : 3 : 1, ovvero AC : BO : : $\sqrt{3}$: 1; dunque *il lato del triangolo equilatero iscritto stà al raggio, come la radice quadrata di 3 stà all' unità.*

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA

Iscrivere in un cerchio dato un decagono regolare, quindi un pentagono ed un pentadecagono.

Si divida il raggio AO (Fig. 159.) in media ed estre-

(a) F1, 3. — (b) 11, 3.

ma ragione del punto M (*a*), si prenda la corda AB eguale al segmento maggiore OM; ed AB sarà il lato del decagono regolare, che bisognerà portar dieci volte sulla circonferenza.

Poichè tirando MB, si ha per costruzione, AO : OM : : OM : AM; ovvero a motivo di AB=OM, AO : AB : : AB : AM; dunque i triangoli ABO, AMB, hanno un angolo comune A compreso fra lati proporzionali; dunque sono simili (*b*). Il triangolo OAB è isoscele, dunque il triangolo AMB lo è pure, e si ha AB=BM; ma AB=OM; dunque anche BM=OM; quindi il triangolo BMO è isoscele.

L'angolo AMB, esterno per rapporto al triangolo isoscele BMO, è doppio dell'interno O (*c*); ora l'angolo AMB=MAB; dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli angoli alla base OAB, ed OBA è doppio dell'angolo al vertice O, dunque i tre angoli del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O, e quindi l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la decima di quattro, dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza, e la corda AB è il lato del decagono regolare.

Corollario I. Se si uniscono a due a due i vertici degli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

Coroll, II. Essendo sempre AB il lato del degagono, sia AL il lato dell'esagono; allora l'arco BL sarà per rapporto alla circonferenza, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, ovvero $\frac{1}{15}$, dunque la corda BL sarà il lato del pentadecagono, o poligono regolare di 15 lati. Si vede nel tempo stesso che l'arco CL è la terza parte di CB.

Scolio. Essendo iscritto un poligono regolare, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti eguali, e si tirino le corde dei semi-archi, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati: quindi si vede che il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8. 16, 32, ec. lati. Del pari l'esagono servirà ad iscrivere i poligoni regolari di 12, 24, 48, ec. lati; il decagono dei poligoni di 20, 40, 80, ec., lati; il pentadecagono dei poligoni di 30, 60, 120, ec. lati (2).

(a) *Prob.* 4. *lib.* 4. — (b) 20, 3. — (c) 19, (1).

(1) *Si è per molto tempo creduto che questi poligoni fossero i soli, che petessero essere iscritti per mezzo della geometria elementare, o pure, ciò che è lo stesso, per mezzo della risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado; ma il Sig. Gauss ha dimostrato in un' opera intitolata* Disquisitiones Aritmeticae. Lipsiae, 1801, *che si può iscrivere con simili mezzi il poligono regolare di diciassette lati, ed in*

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA

Essendo dato il poligono regolare iscritto ABCD, ec., (Fig. 160.) *circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.*

Dal punto T, medio dell'arco AB, si tiri la tangente GH, che sarà parallela ad AB (*a*), si faccia la stessa cosa alla metà di ciascuno degli altri archi BC, CD, ec.; queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK ec. simile al poligono iscritto.

È facile di vedere primieramente che i tre punti O, B, H sono in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN hanno l'ipotenusa comune OH, ed il lato OT = ON; dunque sono uguali (*b*); quindi l'angolo TOH = HON, è per conseguenza la linea OH passa pel punto B medio dell'arco TN: per la medesima ragione il punto I è sul prolungamento di OC, ec. Ma, poichè GH è parallela ad AB, ed HI a BC, l'angolo GHI = ABC (*c*); parimente HIK = BCD, ec.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono eguali a quello del poligono iscritto. Di più a cagione di queste medesime parallele, si ha GH : AB : : OH : OB, ed HI : BC : : OH : OB; dunque GH : AB : : HI : BC. Ma AB = BC, dunque GH = HI. Per la stessa ragione HI = IK, ec.; dunque i lati del poligono circoscritto sono eguali fra loro: dunque questo poligono è regolare, e simile al poligono iscritto.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dato il poligono circoscritto GHIK, ec. . e che bisognasse costruire per mezzo suo il poligono iscritto ABC, ec. basterebbe condurre dai vertici G, H, ec., del poligono dato in linee OG, OH, ec., che incontrerebbero la circonferenza ne' punti A, B, C, ec.; si unirebbero in seguito questi punti colle corde AB, BC, ec., che formerebbero il poligono iscritto. Si potrebbero pure nel medesimo caso, unire più semplicemente i punti di contatto T, N, P, ec, colle corde TN, NP, ec.; il che formerebbe similmente il poligono iscritto simile al circoscritto.

Corollario II. Dunque si possono circoscrivere ad un cerchio dato tutti i poligoni regolari che si sanno iscrivere in questo cerchio, e viceversa.

---

generali quello $2n + 1$ *lati, purchè* $2n + 1$ *sia un numero primo.*

(a) 10, 2. — (b) 18, 1. — (c) 26, 1.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

L' aia d' un poligono regolare è uguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del cerchio iscritto (Fig. 160).

Sia per esempio il poligono regolare GHIK, ec.; il triangolo GOH ha per misura GH $\times$ $\frac{1}{2}$ OT; il triangolo OHI ha per misura HI $\times$ $\frac{1}{2}$ ON; ma ON=OT; dunque i due triangoli riuniti hanno per misura (GH + HI) $\times$ $\frac{1}{2}$ OT. Continuando così per gli altri triangoli si vedrà che la somma di tutti i triangoli, o il poligono intero, ha per misura la somma delle basi GH, HI, IK, ec., o il perimetro del poligono, moltiplicato per $\frac{1}{2}$ OT, metà del raggio del cerchio iscritto.

Scolio. Il raggio del cerchio iscritto OT non è altra cosa che la perpendicolare abbassata dal centro sopra uno dei lati del poligono, la quale perpendicolare si chiama talora l' *apotema* del poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

I perimetri de' poligoni regolari d' un medesimo numero di lati sono come i raggi de' cerchi circoscritti, ed anche come i raggi de' cerchi iscritti; le loro superficie sono come i quadrati di questi medesimi raggi.

Sia AB (Fig. 161.) un lato di uno de' poligoni di cui si tratta, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del cerchio circoscritto, ed OD, perpendicolare sopra AB, il raggio del cerchio iscritto: sia parimente *ab* il lato di un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa* ed *od* i raggi dei cerchi circoscritto ed iscritto. I perimetri de' due poligoni stanno fra loro come i lati AB ed *ab*; ma gli angoli A ed *a* sono uguali essendo ciascuno la metà dell'angolo del poligono, ed uguali sono ancora gli angoli B e *b*; dunque i triangoli ABO, *abo* sono simili: come pure i triangoli rettangoli ADO, *ado*; dunque AB : *ab* : : AO : *ao* : : DO : *do*; dunque i perimetri dei poligoni regolari del medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi AO, *ao* de' cerchi circoscriti, ed anche come i raggi DO, *do* dei cerchi iscritti.

Le aie di questi medesimi poligoni stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*, esse stanno in conseguenza anche come i quadrati de' raggi de' cerchi circoscritti AO, *ao*, o come i quadrati dei raggi de' cerchi iscritti OD, *od*

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Ogni linea curva o poligona che circonda da un' estremità all' altra la linea convessa AMB (Fig. 162.) *è maggiore della linea circondata* AMB.

Abbiamo già detto che per linea convessa intendiamo una linea curva o poligona, o in parte curva ed in parte poligona, tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientrati o delle senuosità, cesserebbe d'esser convessa, perchè è facil vedere che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di cerchio sono essenzialmente convessi; ma la proposizione di cui ora trattasi si estende ad una linea qualunque che soddisfaccia alla condizione richiesta.

Posto ciò, se la linea AMB non è minore di tutte quelle, che la circondano, esisterà fra quest'ultime una linea più corta di tutte le altre, la quale sarà minore di AMB, o tutto al più uguale ad AMB. Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducasi, ove più aggrada, la retta PQ, che non incontri la linea AMB: o che al più non faccia chè toccarla; la retta PQ è minore di PCDEQ; dunque, se alla parte PCDEQ si sostituisce la linea retta PQ, si avrà la linea circondante APQB minore di APDQB. Ma, per supposizione, questa doveva esser la più corta di tutte: dunque questa supposizione non può sussistere; dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Scolio. Si dimostrerà assolutamente nella stessa maniera che una linea convessa, e rientrante in se stessa AMB (Fig. 163.) è più corta d'ogni linea che la circonderebbe da ogni parte, sia che la circondante FHG tocca AMB in uno o più punti, sia che la circonda senza toccarla.

PROPOSIZIONE X.

LEMMA.

Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare i cui lati non incontrino la minore, e si può ancora circoscrivere alla minore un poligono regolare i cui lati non incontrino la maggiore; di tal maniera che in ambedue i casi i lati del poligono descritto saranno compresi fra le due circonferenze.

Siano CA, CB (Fig. 164.) i raggi delle due circonferenze date. Pel punto A conducasi la tangente DE terminata

alla circonferenza maggiore in D ed E: iscrivasi nella circonferenza maggiore uno dei poligoni regolari che si possono iscrivere per i problemi precedenti; si dividano quindi gli archi sottesi dai lati in due parti uguali, e si conducano le corde dei semi-archi; si avrà un poligono regolare d'un doppio numero di lati. Si continua la bisezione degli archi finchè si arriva ad un arco minore di DBE. Sia MBN quest'arco (il cui punto di mezzo è supposto in B); è chiaro che la corda MN sarà più lontana del centro di quanto lo è DE, e che perciò il poligono regolare, di cui MN è lato, non può incontrare la circonferenza, di cui CA è il raggio.

Posto le medesime cose, si tirino CM e CN che incontrano la tangente DE in P e Q; sarà PQ il lato d'un poligono circoscritto alla circonferenza minore, simile al poligono iscritto nella maggiore, il cui lato è MN. Ora è manifesto che il poligono circoscritto che ha per lato PQ, non può incontrare la circonferenza maggiore, poichè CP è minore di CM.

Dunque, mediante la medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore, ed un poligono simile circoscritto alla minore, i quali avranno i loro lati compresi fra le due circonferenze.

Scolio. Se si hanno due settori concentrici FCG, ICH, si potrà similmente iscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o circoscrivere al minore una porzione di poligono simile, talmente che i contorni de' due poligoni siano compsesi fra le due circonferenze: basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti eguali, finchè si arrivi ad una parte minore di DBE.

Chiamiamo qui *porzione di poligono regolare* la figura terminata da una serie di corde eguali iscritte nell'arco FG da una estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali de' poligoni regolari; essa ha gli angoli eguali e i lati eguali, ed è ad un tempo stesso scrittibile e circoscrittibile al cercio; frattanto ella non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da un dei suoi lati non fosse una parte aliquota della cisconferenza.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Le circonferenze de' cerchi sono tra loro come i raggi, e le loro superficie come i quadrati de' medesimi raggi.

Per abbreviare, indichiamo con *cir.* CA (Fig. 165.) la circonferenza che ha per raggio CA; dico che si avrà *cir.* CA : *circ.* OB : : CA : OB.

Poichè, se questa proporzione non ha luogo, CA starà ad OB come *circ.* CA stà ad un quarto termine maggiore o minore di *circ.* OB: supponiamo che sia minore, e sia, s'è possibile, CA : OB : : *circ.* CA : *circ.* OD.

Iscrivasi nella circonferenza di cui OB è il raggio un poligono regolare EFGKLE, i cui lati non incontrino la circonferenza della quale OD è il raggio (*a*); iscrivasi un poligono simile MNPTSM nella circonferenza di cui CA è il raggio.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPSM, EFGKE sono fra loro come i raggi CA, OB, de' cerchi circoscritti (*b*), e si avrà MNPSM : EFGKE : : CA ; OB; ma per ipotesi, CA : OB : : *circ.* CA : *circ.* OD; dunque MNPSM : EFGKF : : *circ.* CA ; *circ.* OD. Or questa proporzione è impossibile, perchè il contorno MNPSM è minore di *circ.* CA (*c*), ed al contrario EFGKE è maggiore di *circ.* OD; dunque è impossibile che CA stia ad OB come *circ.* CA stà ad una circonferenza minore di *circ.* OB, ovvero, in termini più generali, è impossibile che un raggio stia ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio stà ad una circonferenza minore di quella descritta col secondo raggio.

Da ciò si conchiude che non si può avere neppure che CA stia ad OB come *circ.* CA stà ad una circonferenza maggiore di *circ* OB; poichè se ciò fosse, rovesciando i rapporti, OB stà a CA come una circonferenza maggiore di *circ.* OB sta a *circ.* CA, o, il che è lo stesso, come *circ.* OB ad una circonferenza minore di *circ.* CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio stà ad una circonferenza minore di quella descritta col secondo raggio, il che è stato dimostrato impossibile.

Or poichè il quarto termine della proporzione CA : OB : : *circ.* CA : X non può essere nè maggiore nè minore di *circ.* OB, bisogna che sia eguale a *circ.* OB; dunque le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento ed una costruzione interamente simile servirà a dimostrare che le superficie de' cerchi stanno come i quadrati de' loro raggi.

Non entreremo in altri particolari su questa proposizione che d'altronde è un corollario della seguente.

Corollario. Gli archi simili AB, DE, (Fig. 166.) stanno come i raggi AC, DO, ed i settori simili ACB, DOE stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

(a) *Pr.* 10 — (b) *Pr.* 8, — (c) *Pr.* 9.

In fatti, poichè gli archi sono simili, l'angolo C è uguale all'angolo O (*a*); ora l'angolo C stà a quattro angoli retti come l'arco AB stà alla circonferenza intera descritta col raggio AC (*b*), e l'angolo O stà a quattro angoli retti come l'arco DE stà alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE, stanno fra loro come la circonferenza di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO, dunque *arc.* AB : *arc.* DE : : AC : DO.

Per la medesima ragione i settori ACB, DOE, stanno come i cerchi interi, questi stanno come i quadrati de'raggi: dunque *sett.* ACB : *sett.* ODE : : $\overline{AC}^2$: $\overline{DO}^2$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

L'aia del cerchio è uguale al prodotto della suo circonferenza moltiplicata per la metà del raggio.

Indichiamo con *sup.* CA (Fig. 167.) la superficie del cerchio il cui raggio è CA; dico che si avrà *sup.* CA=½CA × *circ.* CA.

Poichè se ½ CA × *cir.* CA non è l'aia del cerchio il cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura d'un cerchio maggiore o minore. Supponiamo primieramente che dessa sia la misura d'un cerchio maggiore, e sia s'è possibile, ½ CA × *circ.* CA=*sup.* CB.

Al cerchio il cui raggio è CA si circoscriva un poligono regolare DBFG ec., i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio CB (*c*); la superficie di questo poligono sarà uguale al suo contorno DE + EF + GH +, ec. moltiplicato per ½ AC (*d*); ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, poichè la circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono DEFG ec. è maggiore di ½ AC × *circ.* AC, che per ipotesi è la misura del cerchio di cui CB è il raggio; dunque il poligono sarebbe maggiore del cerchio B. Ora al contrario è minore, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che ½ CA × *circ.* CA sia maggiore di *sup.* CA, ovvero in altri termini è impossibile che la circonferenza d'un cerchio moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un cerchio maggiore.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura d'un cerchio minore; e, per non cambiar

(a) *Def.* 3 *lib.* 3.—(b) *Pr.* 17, 2.—(c) *Pr.* 10.—(d) *Pr.* 7.

figura, supponiamo che si tratti del cerchio il cui raggio è CB; bisogna dunque provare che $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB non può essere la misura d' un cerchio minore, per esempio, del cerchio il cui raggio è CA. Infatti sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB$=$*sup.* CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG ec. avrà per misura (DE$+$EF$+$FG$+$ec.) $\times$ $\frac{1}{2}$ CA; ma il contorno DE$+$EF$+$FG$+$ec. è minore di *circ.* CB, che lo circonda da tutte le parti: dunque l' aia del poligono è minore di $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CB, e con più ragione, minore di $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *cir.* CB. Quest' ultima quantità è per ipotesi la misura del cerchio di cui CA è il raggio; dunque il poligono sarebbe minore del cerchio iscritto, ciò che è assurdo; dunque è impossibile che la circonferenza di un cerchio moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d' un cerchio minore.

Dunque finalmente la circonferenza d' un cerchio moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura dell'aia di questo medesimo cerchio.

Corollario I. La superficie d' un settore è uguale all' arco di questo settore moltiplicato per la metà del raggio.

Poichè il settore ACB (Fig. 168.) stà al cerchio intero come l' arco AMB stà alla circonferenza intera ABD (a), o come AMB $\times$ $\frac{1}{2}$ AC sta ad ABD $\times$ $\frac{1}{2}$ AC. Ma il cerchio intero$=$ ABD$\times\frac{1}{2}$ AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB$\times\frac{1}{2}$ AC.

II. Chiamiamo π la circonferenza il cui diametro è l'unità; poichè le circonferenze stanno come i raggi, o come i diametri, si potrà far questa proporzione: il diametro 1 stà alla sua circonferenza π come il diametro 2CA (Fig. 165.) stà alla circonferenza che ha per raggio CA, talmente che si avrà $1 : \pi : : 2CA : circ.\ CA = 2\pi \times CA$. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}$ CA, si avrà $\frac{1}{2}CA \times circ.\ CA = \pi \times \overline{CA}^2$, o $sup.\ CA = \pi \overline{CA}^2$; dunque *la superficie d'un cerchio è uguale al prodotto del quadrato del suo raggio moltiplicato pel numero costante* π, *che rappresenta la circonferenza il cui diametro è 1, ossia il rapporto della circonferenza al diametro,*

Parimente la superficie del cerchio che ha per raggio OB, sarà eguale a $\pi \times \overline{OB}^2$: ora $\pi \times \overline{CA}^2 : \pi \times \overline{OB}^2 : : \overline{CA}^2 : \overline{OB}^2$ dunque *le superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*; il che s' accorda col precedente teorema,

(a) *Pr.* 17, 2,

Scolio. Abbiamo già detto che il problema della quadratura del cerchio consiste nel trovare un quadrato eguale in superficie ad un cerchio, il cui raggio è cognito; ma si è ora provato che il cerchio è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e la metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in un quadrato prendendo una media proporzionale fra le due dimensioni (*a*): quindi è che il problema della quadratura del cerchio si riduce a trovar la circonferenza quando si conosce il raggio; e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio, o al diametro.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto se non che in una maniera approssimativa, ma l'approssimazione è stata portata sì lungi, che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto approssimativo. Perciò questa ricerca che ha molto occupato i geometri allorchè i metodi di approssimazione erano men conosciuti, è ora riposta tra le ricerche oziose di cui non è permesso occuparsi se non a coloro che hanno appena le prime nozioni della geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$; laonde $3\frac{1}{7}$, ovvero $\frac{22}{7}$ è un valore già molto prossimo al numero che abbiamo rappresentato con π, e questa prima approssimazione è molto in uso a ragione della sua semplicità *Mezio* ha trovato pel medesimo numero il valore molto più approssimato $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore π, sviluppato fino ad un certo ordine di decimali, è stato trovato da altri calcolatori, 3, 1415926535897932, ec., e si ha avuta la pazienza di continuare questi decimali fino alla centoventisettesima, e parimente sino alla centoquarantesima. È chiaro che una tale approssimazione quasi equivale alla verità, e che non si conoscono meglio le radici delle potenze imperfette.

Si spiegheranno nei problemi seguenti, due dei metodi elementari i più semplici per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Essendo date le superficie d' un poligono regolare iscritto e d' un poligono simile circoscritto, trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto e circoscritto d' un doppio numero di lati.

Sia AB, (Fig. 169) il lato del poligono dato iscritto, EF

(a) *Pr.* 6, *lib.* 3.

parallelo ad AB, quello del poligono simile circoscritto, C il centro del cerchio: se si tirino la corda AM, e le tangenti AP, BQ, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto d' un doppio numero di lati, e PQ doppio di PM, sarà quello del poligono simile circoscritto (*a*). Posto ciò, siccome la medesima costruzione ha luogo nei differenti angoli eguali ad ACM, basta considerare solo l' angolo ACM; ed i triangoli che vi sono contenuti staranno fra loro come i poligoni interi. Sia A la superficie del poligono iscritto di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A' la superficie del poligono di cui AM è un lato, B' la superficie del poligono simile circoscritto; A e B son cogniti, si tratta di trovare A' e B'.

1.° I triangoli ACD, ACM, il cui vertice comune è A, stanno fra loro come le rispettive basi CD, CM, d' altronde questi triangoli stanno come i poligoni A ed A', di cui fanno parte; dunque A : A' : : CD : CM. I triangoli CAM, CME, il cui vertice comune è M, stanno fra loro come le basi rispettive CA, CE, questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A' e B, di cui fanno parte, dunque A' : B : : CA : CE. Ma a cagione delle parallele AD, ME, si ha CD : CM : : CA : CE; dunque A : A' : : A' : B; dunque il poligono A', uno di quelli che si cercano, è medio proporzionale fra i due poligoni cogniti A e B, e si ha per conseguenza $A' = \sqrt{A \times B}$.

2.° A motivo dell' altezza comune CM, il triangolo CPM stà al triangolo CPE come PM stà PE, ma la linea CP dividendo in due parti eguali l'angolo MCE, si ha (*b*) PM : PE : : CM : CE : : CD : CA : : A : A' : perciò CPM : CPE : : A : A' : ed in conseguenza a CPM : CPM+CPE, o CME : : A : A+A'. Ma CMPA o 2CMP e CME stanno fra loro come i poligoni B' e B di cui fanno parte. dunque B' : B : : 2A : A+A'. Si è di già determinato A'; questa nuova proporzione determinerà B', e si avrà $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$: dunque, col mezzo dei poligoni A e B è facile trovare i poligoni A' e B' che hanno un doppio numero di lati.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.

(a) *Pr.* 6. — (b) *Pr.* 17, 2.

Sia il raggio del cerchio $=1$; il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$ (*a*); quello del quadrato circoscritto sarà eguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato iscritto $=2$, e quella del quadrato circoscritto $=4$. Ora se si fa $A=2$, e $B=4$, si troverà pel problema precedente l'ottagono iscritto $A'=\sqrt{8}=2,8284271$, e l'ottagono circoscritto $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3,3137085$, Conoscendo così gli ottagoni iscritti e circoscritti si troveranno col loro mezzo i poligoni d'un doppio numero di lati: bisognerà nuovamente supporre $A=2,8284271$, $B=3,3137085$, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}=3,0614674$, e $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}=3,1825979$. In seguito questi poligoni di 16 lati serviranno per far conoscere quelli di 32, e si continuerà così finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni iscritti, e circoscritti, almeno nelle cifre decimali a cui ci siamo fermati, che in questo esempio son sette. Arrivati a tal punto si conchiuderà che il cerchio è uguale all'ultimo risultamento, perchè il cerchio deve sempre esser compreso tra il poligono iscritto ed il poligono circoscritto; dunque se questi non differiscono fra di loro fino ad un cert' ordine di decimali, il cerchio pure non ne differirà fino al settimo ordine.

Numero dei lati	Poligono iscritto.	Poligono circoscritto
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422226
256	3,1412772	5,1417504
512	5,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3.1415877	4,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926

(a) 3.

Da ciò conchiudo che la superficie del cerchio$=3,1415926$. Si potrebbe aver dubbio sull'ultima decimale a cagione degli errori prodotti dalle parti che vengono neglette; ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per esser certi del risultamento, che abbiam trovato fino all'ultima decimale.

Poichè la superficie del cerchio è uguale alla mezza circonferenza moltiplicata pel raggio, essendo il raggio$=1$, la mezza-circonferenza è $3,1415926$; ovvero, essendo il diametro$=1$, la circonferenza è $3,1415926$; dunque il rapporto della circonferenza al diametro, disegnato di sopra con π è $=3,1415926$.

PROPOSIZIONE XV.

LEMMA.

» *Il triangolo* CAB (Fig. 170.) *è equivalmente al triangolo* » *isoscele* DCE, *che ha il medesimo angolo* C, *il cui lato* CE, » *eguale a* CD, *è medio proporzionale tra* CA *e* CB. *Di più, se* » *l'angolo* CAB *è retto, la perpendicolare* CF *abbassata sulla ba-* » *se del triangolo isoscele sarà media proporzionale tra il lato* CA » *e la semi somma dei lati* CA, CB.

» Poichè, 1.° a motivo dell'angolo comune C, il trian- » golo ABC stà al triangolo isoscele DCE come $AC\times CB$ stà a » $DC\times CE$, o $\overline{DC}^2$ (*a*); dunque questi triangoli saranno equi- » valenti, se $\overline{DC}^2=AD\times CB$, o se DC media proporzionale » tra AC e CB.

» 2.° La perpendicolare CGF tagliando in due parti egua- » li l'angolo ACB, si ha (*b*) AG : GB : : AC : CB, donde » risulta; *componendo* AG : AG+GB o AB : : AC : AC+CB, » ma AG stà ad AB come il triangolo ACG stà al triangolo » ACB, o 2CDF : d'altronde se l'angolo A è retto, i trian- » goli rettangoli ACG, CDF, saranno simili, e daranno ACG : » CDF : : $\overline{CA}^2 : \overline{CF}^2$, dunque

$$\overline{AC}^2 : 2\overline{CF}^2 : : AC : AC+CB.$$

» Moltiplicando il secondo rapporto per AC, gli antecedenti » diverranno eguali, e si avrà per conseguenza $2\overline{CF}^2=AC\times$ » $(AC+CB)$, o $=AC\times\left(\frac{AC+CB}{2}\right)$; dunque 2.°, se l'an-

(a) *Pr.* 24, 3. — (b) *Pr.* 17, 3.

» golo A è retto, la perpendicolare CF sarà media propor-
» zionale tra il lato AC e la semi-somma dei lati AC, CB.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

» *Trovare un cerchio che differisca tanto poco quanto si vorrà*
» *da un poligono regolare dato.*

» Sia proposto, per esempio, il quadrato BMNP; (Fig.
» 171.) si abbassi dal centro C la perpendicolare CA sul la-
» to MB e si tiri CB.

» Il cerchio descritto col raggio CA è iscritto nel qua-
» drato; ed il cerchio descritto col raggio CB è circoscritto
» dal medesimo quadrato; il primo sarà minore del quadra-
» to, il secondo sarà maggiore; ma si tratta di ristringere
» questi limiti.

» Si prendano CD e CE eguali ciascuna alla media pro-
» porzionale tra CA e CB, e tirisi ED; il triangolo isoscele
» CDE sarà equivalente al triangolo CAB (*a*); si faccia lo stes-
» so per ciascuno degli otto triangoli, che compongono il
» quadrato, e si formerà così un ottagono regolare equivalen-
» te al quadrato BMNP. Il cerchio descritto col raggio CF
» medio proporzionale fra CA e $\frac{CA+CB}{2}$, sarà iscritto nel-
» l'ottagono, ed il cerchio descritto col raggio CD gli sarà
» circoscritto. Laonde il primo sarà minore del quadrato da-
» to, ed il secondo maggiore.

» Se si cangia nella medesima maniera il triangolo ret-
» tangolo CDF in un triangolo isoscele equivalente, si for-
» merà con tal mezzo un poligono regolare di sedici lati
» equivalente al quadrato proposto. Il cerchio iscritto in que-
» sto poligono sarà minore del quadrato, ed il cerchio cir-
» coscritto sarà maggiore.

» Si può continuare così finchè il rapporto tra il raggio
» del cerchio iscritto, ed il raggio del cerchio circoscritto
» differisca tanto poco quanto si vorrà dall'eguaglianza. Al-
» lora e l'uno e l'altro cerchio potrà essere riguardato come
» equivalente al quadrato proposto.

» *Scolio.* Ecco a che cosa riducesi la ricerca dei raggi
» consecutivi. Sia *a* il raggio del cerchio iscritto in uno dei
» poligoni trovati, *b* il raggio del cerchio circoscritto al me-

(a) *Pr.* 51.

» desimo pogliono ; siano a' e b' i raggi simili pel poligono
» susseguente che ha un doppio numero di lati. Secondo
» ciò che abbiamo dimostrato, b' è una media proporzio-
» nale fra a e b, ed a' è una media proporzionale fra a
» ed $\frac{a+b}{2}$; talmente che, si avrà $b'=\sqrt{a\times b}$, ed $a'=$
$\sqrt{a\times\frac{a+b}{2}}$: dunque, essendo cogniti i raggi a e b d'un po-
» ligono, se ne dedurranno facilmente i raggi a' e b' del
» poligono seguente; e si continuerà così finchè la differenza
» fra i due raggi sia divenuta insensibile; allora l'uno o l'al-
» tro di questi raggi sarà il raggio del cerchio equivalmente al
» quadrato o al poligono proposto.

» Questo metodo è facile a praticarsi in linee, poichè si
» riduce a trovare delle medie proporzionali successive fra li-
» nee cognite; ma riesce ancora meglio in numeri ed è uno
» dei mezzi più comodi che la geometria elementare possa
» offerire per trovar prontamente il rapporto approssimativo
» della circonferenza al diametro. Sia il lato del quadrato
» $=2$, il primo raggio iscritto CA sarà 1, ed il primo rag-
» gio circoscritto CB sarà $\sqrt{2}$ ovvero 1, 4142136. Facendo
» dunque $a=1$ e $b=1$, 4142136, si troverà $b'=1$, 1892071,
» ed $a'=1$, 0986841. Questi numeri serviranno a calcolare i
» seguenti secondo la legge data di continuazione.

» Ecco il risultamento del calcolo fatto fino a sette ov-
» vero otto cifre colle tavole dei *logaritmi* ordinari.

Raggi de' cerchi circoscritti	Raggi de' cerchi iscritti
1, 4142136	1, 0000000
1, 1892071	1, 0986841
1, 1430500	1, 1210863
1, 1320149	1, 1265639
1, 1292862	1, 1279257
1, 1286063	1, 1282657

» Ora che la prima metà delle cifre è ridotta la mede-
» sima da ambe le parti, si potrà, invece de' medi geome-
» trici, prendere i medi aritmetici, che ne differiscono sol-
» tanto nelle decimali ulteriori. Con tal mezzo l'operazione si
» abbrevia molto, ed i risultamenti sono,

1 , 1284360	1 , 1283508
1 , 1283934	1 , 1283721
1 , 1283827	1 , 1283774
1 , 1283801	1 , 1283787
1 , 1283794	1 , 1283791
1 , 1283792	1 , 1283792

» Dunque 1, 1283792 è approssimativamente il raggio del » cerchio eguale in superficie al quadrato il cui lato è 2. Da » ciò è facile trovare il rapporto della circonferenza al dia- » metro, perchè si è dimostrato che la superficie del cerchio » è eguale al quadrato del raggio moltiplicato per il nume- » ro π; dunque se si divide la superficie 4 pel quadrato di » 1, 1283792, si avrà il valore di π, che si trova con que- » sto calcolo essere 3 , 1425926 cc. , come si era trovato » con un altro metodo.

APPENDICE AL LIBRO IV.

DEFINIZIONI.

» 1. Si chiama *massimo* la quantità la più grande fra tut- » te quelle della medesima specie : *minimo* la più piccola.

» Così il diametro del cerchio è un *massimo* fra tutte le » rette che congiungono due punti della circonferenza , e la » perpendicolare è un *minimo* fra tutte le rette condotte da » un punto dato ad una linea data.

» 2. Si chiamano figure *isoperimetre* quelle che hanno i » perimetri eguali.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

» *Fra tutti i triangoli della stessa base e dello stesso pe-* » *rimetro, il triangolo* massimo *è quello nel quale i due lati* » *non determinati sono eguali.*

» Sia AC=CB (Fig. 172.) ed AM+MB=AC+CB ; di-
» co che il triangolo isoscele ACB è maggiore del triangolo
» AMB che ha la medesima base e lo stesso perimetro.

» Dal punto C, come centro, e col raggio CA=CB, de-
» scrivasi una circonferenza che incontri CA prolungata in
» D; tirisi BD, e l'angolo DBA iscritto nel semi-cerchio,
» sarà un angolo retto (*a*). Prolunghisi la perpendicolare BD
» verso N, si faccia MN=MB, e si tiri AN. Finalmente dai
» punti M e C si abbassino MP, e CG perpendicolari sopra DN.
» Poichè CB=CD ed MN=MB, si ha AC+CB=AD, ed
» AM+MB=AM+MN. Ma AC+CB=AM+MB; dunque AD
» =AM+MN; dunque AD>AN. Ora, se l'obliqua AD è
» maggiore dell'obliqua AN, essa dev'essere più lontana dal-
» la perpendicolare AB; dunque DB>BN; dunque BG, che
» è metà di BD (*b*), sarà più grande di BP, metà di BN.
» Ma i triangoli ABC, ABM, che hanno la medesima base
» AB, stanno fra loro come le rispettive altezze BG, BP,
» dunque poichè si ha BG>BP, il triangolo isoscele ABC è
» maggiore del non isoscele ABM della medesima base, e del-
» lo stesso perimetro.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA

» *Di tutti i poligoni isoperimenti e di un medesimo numero*
» *di lati quello ch' è un* massimo *ha i suoi lati eguali.*

» Poichè sia ABCDEF (Fig. 173.) il poligono *massimo*,
» se il lato BC non è eguale a CD, facciasi sulla base BD,
» un triangolo isoscele BOD, che sia isoperimetro a BCD. Il
» triangolo BOD sarà maggiore di BCD (*c*), e per conseguen-
» za il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF; dun-
» que quest'ultimo non sarebbe il *massimo* fra tutti quelli,
» che hanno l'istesso perimetro, ed il medesimo numero di
» lati, il che è contra la supposizione. Dunque si deve ave-
» re BC=CB : avremo per la medesima ragione CD=DE,
» DE=EF, ec., dunque tutti i lati del poligono *massimo*
» sono eguali tra loro.

(a) *Pr.* 13, 2. — (b) *Pr.* 12, 1. — (c) *Pr.* 1.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

» *Di tutti i triangoli formati con due lati facendo fra*
» *loro un angolo a piacimento*, *il* massimo *è quello in cui*
» *i due lati formano un angolo retto.*

» Siano due i triangoli BAC, BAD, (Fig. 174.) che
» hanno il lato AB comune, ed il lato AC=AD; se l'ango-
» lo BAC è retto, dico che il triangolo BAC sarà maggiore
» del triangolo BAD, nel quale l'angolo A è acuto, ovvero
» ottuso.

» Poichè, avendo la stessa base AB, i due triangoli BAC,
» BAD stanno come le altezze AC, DE; ma la perpendicola-
» re DE è minore dell'obliqua AD, o della sua eguale AC;
» dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

» *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati ed un ultimo*
» *a piacimento, il* massimo *dev'esser tale che tutti i suoi angoli*
» *siamo iscritti in una mezza-circonferenza di cui il lato inco-*
» *gnito sia il diametro.*

» Sia ABCDEF (Fig. 175.) il *massimo* dei poligoni for-
» mati coi lati dati AB, BC, CD DE, EF, ed un ultimo AF
» a piacimento; tirate le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF
» non fosse retto, si potrebbe, conservando le parti ABCD,
» DEF tali quali sono, aumentare il triangolo ADF, e per
» conseguenza il poligono intero, rendendo l'angolo ADF ret-
» to conformemente alla proposizione precedente: ma questo
» poligono non può essere aumentato di più, poichè si sup-
» pone giunto al suo *massimo*; dunque l'angolo ADF è già
» un angolo retto. Lo stesso è degli angoli ABC, ACF, AEF;
» dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F, del poligono *mas-*
» *simo* sono iscritti in una mezza-circonferenza, di cui il la-
» to indeterminato AF è il diametro.

» *Scolio.* Questa proporzione dà luogo ad una questione
» cioè se vi siano più maniere di formare un poligono con dei
» lati dati, ed un ultimo incognito che sarà il diametro della
» mezza-circonferenza nella quale gli altri lati sono iscritti. Pri-

» ma di decidere queste quistioni bisogna osservare che se
» una medesima corda AB sottende degli archi descritti con
» differenti raggi AC, AD, (Fig. 176.) l'angolo al centro
» appoggiato su questa corda sarà minore nel cerchio di cui
» il raggio è maggiore; così ACB<ADB. Infatti l'angolo ADO
» =ACD+CAD (*a*); dunque ACD<ADO, e raddoppiando da
» una parte e dall'altra si avrà ACB<ADB.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

» *Non vi è che una sola maniera di formare il poligono*
» ABCDEF (Fig. 175.) *con dei lati dati ed un ultimo in-*
» *cognito, che sia il diametro della semi- circonferenza nella*
» *quale sono iscritti gli altri lati.*

» Poichè supponiamo che si sia trovato un cerchio che
» soddisfaccia alla questione; se si prenda un cerchio maggio-
» re, le corde AB, BC, CD, ec. corrisponderanno ad ango-
» li al centro minore. La somma di questi angoli al centro
» sarà dunque minore di due angoli retti: quindi le estremi-
» tà dei lati dati non termineranno più all'estremità d'un dia-
» metro. L'inconveniente contrario avrà luogo se si prenda
» un cerchio minore; dunque il poligono di cui si tratta non
» può essere iscritto se non che in un solo cerchio.

» *Scolio.* Si può cambiare a piacimento l'ordine de' lati
» AB, BC, CD, ec. ed il diametro del cerchio circoscritto
» sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligo-
» no; poichè qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, ec.
» basta che la lor somma faccia la semi-circonferenza, ed il
» poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè sarà
» eguale al semicerchio meno i segmenti AB, BC, ec., la
» somma de' quali è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

» *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati il* massimo
» *è quello che si può iscrivere in un cerchio.*

» Sia ABCDEFG (Fig. 177.) il poligono iscritto, ed *abcdefg*
» il non iscrittibile formato con dei lati eguali, talmente che

(*a*) *Pr.* 27, 1.

» sia AB=*ab*, BC=*bc*, ec., dico che il poligono iscritto è
» maggiore dell' altro.

» Tirisi il diametro EM, si congiungano AM, MB; sopra
» *ab*=AB si faccia il triangolo *abm*=ABM, e si unisca *em*.

» In virtù della proposizione IV il poligono EFGAM è
» maggiore di *efgam*, a meno che questo non possa essere
» similmente iscritto in una semi-circonferenza, di cui il la-
» to *em* sarebbe il diametro; nel qual caso i due poligoni sa-
» rebbero eguali in virtù della proposizione V. Per la mede-
» sima ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, sal-
» vo la medesima eccezione in cui vi sarebbe eguaglianza. Dun-
» que il poligono intero EFGAMBCDE è maggiore di *efgambcde*
» a meno che non sieno interamente eguali; ma essi non lo
» sono, poichè l' uno è iscritto nel cerchio, e l' altro è sup-
» posto non iscrittibile, dunque il poligono iscritto è il mag-
» giore. Togliendo da ambedue le parti i triangoli eguali ABM
» *abm*, resterà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del
» non iscrittibile *abcdefg*.

» *Scolio*. Si dimostrerà come nella proposizione V, che
» non può esservi che un sol cerchio, e per conseguenza che
» un sol poligono *massimo* che soddisfaccia alla quistione: e
» questo poligono sarebbe ancora della medesima superficie in
» qualunque modo che si cangiasse l' ordine dei suoi lati.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

» *Il poligono regolare è un* massimo *fra tutti i poligoni iso-*
» *perimetri, e d' un medesimo numero di lati.*

» Poichè, in virtù del teorema II, il poligono *massimo* ha
» tutti i suoi lati eguali; e secondo il teorema precedente, è
» iscrittibile nel cerchio; dunque questo poligono è regolare.

PROPOSIZIONE VIII.

LEMMA.

» *Due angoli al centro, misurati in due cerchi differenti,*
» *stanno fra loro come gli archi compresi divisi per i loro raggi.*

» Così l' angolo C (Fig. 178.) stà all' angolo O come il
» rapporto $\frac{AB}{AC}$ stà al rapporto $\frac{DE}{DO}$.

» Con un raggio OF eguale ad AC descrivasi l' arco FG
» compreso tra i lati OD, OE prolungati: a cagione de' rag-
» gi eguali AC, OF, si avrà parimente C : O : : AB :
» FG (*a*), ovvero : : $\frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$. Ma a cagione degli archi si-
» mili FG, DE, si ha (*b*) FG : DE : : FO : DO; dunque
» il rapporto $\frac{FG}{FO}$ è eguale al rapporto $\frac{DE}{DO}$, e per conseguen-
» si ha C : O : : $\frac{AB}{CA} : \frac{DE}{DO}$.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA

» *Di due poligoni regolari isoperimenti quello, che ha più*
» *lati è il maggiore.*

» Sia DE (Fig. 179.) il mezzo lato d' un dei poligoni, O
» il suo centro, OE la sua apotema; sia AB il mezzo-lato
» dell' altro poligono, C il suo centro, CB la sua apotema.
» Si suppongano i centri O e C situati ad una distanza qua-
» lunque OC, o le apoteme OE, CB nella direzione OC, così
» DOE, ed ACB saranno i mezzi-angoli al centro dei poligo-
» ni; e siccome questi angoli non sono eguali, le rette CA,
» OD prolungate s' incontreranno in un punto F; da questo
» punto si abbassi su OC la perpendicolare FG; dai punti O e
» C come centri, si descrivano gli archi GI, GH, terminati
» ai lati OF, CF.

» Posto ciò, si avrà pel lemma precedente O : C : :
» $\frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; ma DE stà al perimetro del primo poligono come
» l' angolo O stà a quattro angoli retti, ed AB stà al perime-
» tro del secondo come l'angolo C stà a quattro angoli retti;
» dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono eguali, DE :
» AB : : O : C, ovvero DE : AB : : $\frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$. Moltipli-
» cando gli antecedenti per OG, ed i conseguenti per CG si
» avrà DE $\times$ OG : AB $\times$ CG : : GI : GH; ma i triangoli
» simili ODE, OFG danno OE : OG : : DE : FG, donde

(a) *Pr.* 17. — (b) *Pr.* 11.

» risulta DE×OG=OE×FG ; si avrà parimente AB×CG=
» CB×FG ; dunque OE×FG : CB×FG : : HI : GH ; ovve-
» ro OE : CB : : GI : GH. Se dunque farem vedere che
» l'arco GI è maggiore dell' arco GH ne seguirà che l'apo-
» tema OE è maggiore di CB.

» Dall'altra parte di CF si faccia la figura CKx intera-
» mente eguale alla figura CGx, in modo che si abbia GK
» =CG, l'angolo HCK=HCG, e l'arco Kx—xG; la curva
» KxG inviluppe rà l'arco KHG, e sarà maggiore di quest'ar-
» co (*a*). Dunque Gx metà della curva è maggiore di GH metà
» dell'arco ; dunque, con più ragione, GI è maggiore di GH.

» Risulta da ciò che l'apotema OE è maggiore di CB :
» ma i due poligoni, avendo il medesimo perimetro, stanno
» fra loro come le rispettive apoteme (*b*); dunque il poligono
» che ha per mezzo-lato DE, è maggiore di quello, che ha
» per mezzo-lato AC : il primo ha più lati, poichè il suo an-
» golo al centro è minore, dunque di due poligoni regolari
» isoperimetri quello che ha più lati è il maggiore.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

» *Il cerchio è maggiore di ogni poligono isoperimetro.*

» Si è già dimostrato che di tutti i poligoni isoperime-
» tri e d'un medesimo numero di lati il poligono regolare è
» maggiore, laonde non si tratta adesso che di paragonare il
» cerchio ad un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia
» AI (Fig. 180.) il mezzo-lato di questo poligono, C il suo
» centro. Sia nel cerchio isoperimetro l'angolo DOE=ACI,
» e perciò l'arco DE eguale al mezzo-lato AI. Il poligono P
» stà al cerchio C come il triangolo ACI stà al settore ODE;
» così avremo P : C : : $\frac{1}{2}$AI × CI : $\frac{1}{2}$ DE × OE : : CI : DE.
» Sia tirata al punto E la tangente EG, che incontri OD
» prolungata in G ; i triangoli simili ACI, GOE daranno la
» proporzione CI : OE : : AI, ovvero DE : GE ; dunque
» P : C : : DE : GE, o come DE × $\frac{1}{2}$ OE, che è la mi-
» sura del settore DOE, stà a GE × $\frac{1}{2}$ OE, che è le misura
» del trirngolo GOE : ora il settore è minore del triangolo ;
» dunque P è minore di C, dunque il cerchio è maggiore di
» ogni poligono isoperimetro.

Fine della Geometria Piana.

(a) *Pr.* 9. — (b) *Pr.* 7.

E
G
B
D
O
F
B
C
D
A
E
E
H
F
G
A
C
B
D
E
D
C
O
B
H
C
B
D
G
E
G
C
O
F
D
A
B
K
E
B
A
C
B
A
C
D
B
L

C
C
B
D
E
p
q
D
E
A
C
67
A
B
C
D
O
D
C
A
C
73
O
D
A
B
L
I
74
C
A
B
E
D
E
B
I
F
G
F
H
78
D
E
F
G
83
D
E
A
B
C
82
G

M
88
E
O
A
G
B
I
F
K
C
D E
C
A
94
D E C
95
F B
A F B
B
D
C
98
D
F
C
D
FK C
A
E
B
A
EIOB
DE
C
K
E
H D
E
F
G
H
I
I
D
C
A
F
L
B
A
B
C
A
D
E
B
A
C
E
D
C

118
H D G
A C
E B F
120
F
A D
B C
124
A
I E H
F D
G C
125
A
D I K L E
B F G H C
130
C B
O
A D
131
O
D
A
B C
H
I
K
136
M
P C B
137
A B
C I
D K
E L
F M
G B
142
C
E
D
A
B
141
E
C
D
F B

K
E
A
D
C
B
146
D
G
A
E
F
M
N
H
F
E
I
P
A
B
151
Q
E
154
C
B
E
D
F
C
155
A
B
e
d
H
R
T
G
160
B
A
S
N
F
E
I
C
O
F
M
P
R
D
D
E
K
Q
L

163
F
F
D
G
A
O
H
A
B
D
E
C
O
D
C
G
172
A
B
M
P
N
167
O
E
B
D
A
B
C
F
G
D
E
O
F
I
K
x
H
A
179
D
G
B
C
E
O
T
A
I
B
G
E
H
D
F
C
180
C
A

Tavola 7. bis.